CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

Cuprins:

5.1. Inducția electromagnetică

În capitolele anterioare am studiat fenomene statice în care câmpurile electrice şi magnetice nu se schimbă în timp. În acest capitol vom analiza situațiile în care distribuțiile de sarcină şi/sau curent sunt variabile în timp. Vom constata că în acest caz câmpul electric se cuplează cu câmpul magnetic şi nu mai pot fi studiate separat. Câmpurile electrice şi magnetice variabile în timp formează câmpul electromagnetic cu unele proprietăți care nu le întâlnim în cazul câmpurilor statice.

Pentru început să considerăm circuitele electrice din figura 5.1.

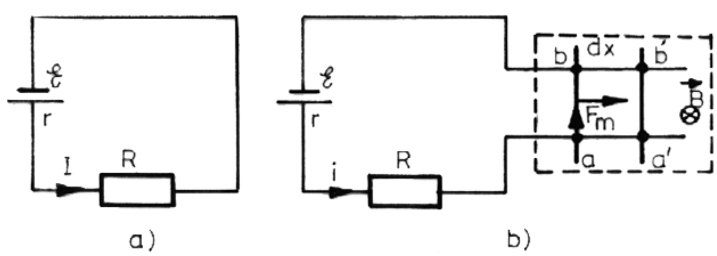

Figura 5.1: a) *Circuit electric închis format dintr-o sursă de tem şi o rezistență R.* ***b)*** *Circuitul din cazul a) cu porțiunea ab care se mişcă perpendicular pe un câmp magnetic cu inducția* $\vec{B}$

În cazul circuitului din figura 5.1.a energia debitată de sursă în timpul dt este $\varepsilon I\,dt$. Această energie se transformă în căldură în rezistențele R şi r şi legea de conservare a energiei se scrie:

$$\varepsilon I\,dt = RI^2dt + rI^2dt \tag{5.1}$$

Dacă simplificăm cu $I\,dt$ obținem legea lui Ohm pentru un circuit închis:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \tag{5.2}$$

Să analizăm acum circuitul din figura 5.1.b în care porţiunea de conductor *ab* cu lungimea *l* se deplasează pe distanţa *dx* în timpul *dt* sub acţiunea forţei magnetice $F_m = B\,i\,l$ orientată ca în figura 5.1.b. Legea conservării energiei în acest circuit se scrie:

$$\varepsilon\, I\, dt = Ri^2 dt + ri^2 dt + dL \tag{5.3}$$

unde primii trei termeni au semnificaţiile din ecuaţia (5.1) iar *dL* este lucrul mecanic efectuat de forţa magnetică pentru deplasarea conductorului *ab*, prin care trece curentul *i*, pe distanţa *dx*.

Adică:

$$dL = F_m dx = B\,i\,l\,dx \tag{5.4}$$

Introducem ecuaţia (5.4) în (5.3), simplificăm cu *i* şi împărţim cu *dt* pentru a obţine:

$$\varepsilon = Ri + ri + Bl\frac{dx}{dt} \tag{5.5}$$

Aceasta mai poate fi scrisă sub o formă analoagă cu ecuaţia (5.2) astfel:

$$i = \frac{\varepsilon - Bl\dfrac{dx}{dt}}{R + r} \tag{5.6}$$

Dacă comparăm ecuaţia (5.2) cu ecuaţia (5.6) observăm că în aceasta din urmă a apărut un termen suplimentar care se scade din tensiunea electromotoare ε a sursei. Este evident că acest termen este tot o tensiune electromotoare, adică:

$$-Bl\frac{dx}{dt} = \varepsilon_i \tag{5.7}$$

Această *tensiune electromotoare* se numeşte *de inducţie* deoarece ea a apărut în circuit indusă de mişcarea conductorului în câmp magnetic.

Dacă definim fluxul inducţiei magnetice $\vec{B}$ printr-o suprafaţă *S* prin integrala de suprafaţă:

$$\Phi = \iint_S \vec{B}d\vec{A} \tag{5.8}$$

atunci produsul $B\,l\,dx = BdA = \vec{B}d\vec{A}$ din ecuaţia (5.7) reprezintă fluxul magnetic prin suprafaţa $ldx = dA$, măturată în timpul *dt* de conductorul *ab*. Deci, relaţia (5.7) se mai scrie sub forma mai generală:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{5.9}$$

Această relaţie este cunoscută sub numele de *legea lui Faraday* pentru inducţia electromagnetică. Observăm că în (5.9) Φ este fluxul magnetic şi este un scalar. De asemenea, în (5.9) tensiunea electromotoare ε_i se măsoară în volţi iar fluxul magnetic în Wb (weber = unitatea de flux magnetic în SI).

Legea lui Faraday este o lege globală (integrală) şi ea este valabilă nu numai în cazul mişcării conductorilor în câmp magnetic staţionar, ci este aplicabilă în toate cazurile în care avem un flux magnetic variabil în timp. În conformitate cu relaţia de definiţie (5.8) fluxul magnetic variază în timp când: 1) $\vec{B}$ variază în timp ca mărimea sau/şi sens; 2) aria S închisă de curba C în care se induce ε_i variază în mărime şi/sau sens (orientarea normalei); 3) variază atât $\vec{B}$ cât şi S în timp.

Să considerăm acum cazul mai general în care o suprafaţă S deschisă limitată de o curbă C se află într-o regiune unde există un câmp magnetic cu inducţia $\vec{B}$. Presupunem că S, C şi $\vec{B}$ depind fiecare de timp (variază în funcţie de timp). Dacă notăm cu $\vec{E}$ intensitatea câmpului electric dintr-un punct oarecare de pe curba C atunci, prin definiţie, tensiunea electromotoare de inducţie în circuitul C închis are expresia:

$$\varepsilon_i = \oint_C \vec{E} d\vec{s} \tag{5.10}$$

unde $d\vec{s}$ este un element de lungime din circuitul C (acesta poate fi, de exemplu, circuitul din figura 5.1.b).

Din ecuaţiile (5.9) şi (5.10) obţinem:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{A} \tag{5.11}$$

Dacă alegem un sistem de referinţă (inerţial) în care S să nu depindă de timp atunci în ecuaţia (5.11) putem să introducem derivata temporală sub integrală şi să scriem:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} \tag{5.12}$$

unde sub integrală am scris derivată parţială în raport cu timpul deoarece $\vec{B}$ este funcţie de poziţie (coordonatele spaţiale) cât şi de timp.

Din teorema lui Stokes partea stângă a ecuaţiei (5.12) se scrie:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = \iint_S rot\, \vec{E}\, d\vec{A} \tag{5.13}$$

Din cauză că relaţiile (5.12) şi (5.13) sunt valabile pentru orice suprafaţă de integrare S rezultă:

$$rot\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.14}$$

Aceasta este forma locală (diferenţială) a legii lui Faraday şi este considerată ca o lege fundamentală a electromagnetismului. Ea *exprimă faptul general că un câmp magnetic variabil în timp produce un câmp electric.* Cu alte cuvinte, câmpul magnetic variabil în timp este o sursă de câmp electric în orice punct din spaţiu. Astfel avem două surse de câmp electric, sarcina electrică $\left(div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)$ şi câmpul magnetic variabil în timp (ecuaţia (5.14)).

Remarcăm că acest câmp electric E generat de câmpul magnetic nu este în general un câmp conservativ deoarece

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} \neq 0 \tag{5.15}$$

ca urmare, rezultă ecuația (5.14) cu $rot\,\vec{E} \neq 0$ şi $\vec{E}$ nu poate fi gradientul unei funcții scalare. În cazul special în care $\vec{B}$ este constant în timp, câmpul $\vec{E}$ este conservativ analog cu câmpul electrostatic $\vec{E}_q$ generat de sarcina q $\left(div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \right)$ pentru care $\vec{E}_q = -grad\,V$.

Din cele de mai sus rezultă că un câmp electric $\vec{E}$ poate fi descompus în două componente $\vec{E}_q$ şi $\vec{E}_i$ în care prima componentă este conservativă în timp ce a doua nu este conservativă. Componenta neconservativă care rezultă din câmp magnetic variabil în timp (în conformitate cu ecuația (5.14) este numită *componenta solenoidală* (care semnifică că are divergența zero). Pentru această componentă putem scrie că:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} \tag{5.16}$$

în care $\vec{A}$ este un potențial vectorial. Introducem ecuația (5.16) în (5.14) şi obținem:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\,\vec{A}\right) = rot\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \tag{5.17}$$

Această relație este echivalentă cu:

$$rot\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{5.18}$$

Dar rotorul unui vector este zero dacă acest vector este un gradient al unei funcții scalare:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -grad\,\phi \tag{5.19}$$

unde ϕ este un câmp scalar. Deoarece *grad* ϕ este un câmp vectorial conservativ şi $-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ satisface:

$$rot\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0 \tag{5.20}$$

putem descompune câmpul $\vec{E}$ sub forma:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\,\phi \tag{5.22}$$

Cantitatea ϕ este o funcție scalară care este diferită de potențialul electrostatic, *V*, introdus în pagina 8. Prin urmare putem scrie:

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_q \tag{5.23}$$

unde

$$\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ şi } \vec{E}_q = -grad\,\phi \tag{5.24}$$

Câmpul $\vec{E}_i$ este indus de câmpul magnetic şi el este solenoidal (neconservativ) în timp ce câmpul $\vec{E}_q$ rezultă din sarcini electrice şi este nesolenoidal şi conservativ.

În finalul acestui paragraf să analizăm prezenţa semnului minus din relaţia integrală (5.9) şi din cea diferenţială (5.14). Acest semn poate fi considerat ca un "feedback negativ" care asigură tendinţa de stabilizare a sistemului, spre deosebire de un feedback pozitiv care ar putea avea ca rezultat generarea unui câmp $\vec{B}$ infinit de intens. Semnul minus asigură că pe baza acestui fenomen de inducţie electromagnetică să nu se poată construi un perpetum mobil. Astfel, dacă avem un circuit *C* format dintr-un conductor, tensiunea electromotoare indusă va dă naştere unui curent în conductor care se opune variaţiei fluxului magnetic prin *C*. Dacă semnul minus ar fi absent ar rezulta o creştere nelimitată a fluxului pe seama curentului indus. Semnul minus în relaţiile (5.9) şi (5.14) exprimă legea cunoscută sub numele de *legea lui Lenz*. Această lege este exprimată adesea sub forma poetică *"eu curentul cel indus, totdeauna m-am opus, cauzei care m-a produs*". Pentru a înţelege această exprimare prezentăm în figura 5.2. sensul curentului de inducţie într-un contur închis *C* pentru două cazuri: fig 5.2.a pentru cazul când fluxul câmpului magnetic exterior creşte $\left(\frac{dF}{dt} > 0\right)$ şi fig. 5.2.b pentru cazul când acesta scade $\left(\frac{dF}{dt} < 0\right)$. În această figură se prezintă şi direcţia momentului magnetic $\vec{m}$ al buclei *C* de curent indus care în figura 5.2.a este opus liniilor de câmp magnetic extern (deci duce la scăderea fluxului total), iar în figura 5.2.b este în acelaşi sens cu câmpul magnetic extern (adică conduce la creşterea fluxului total).

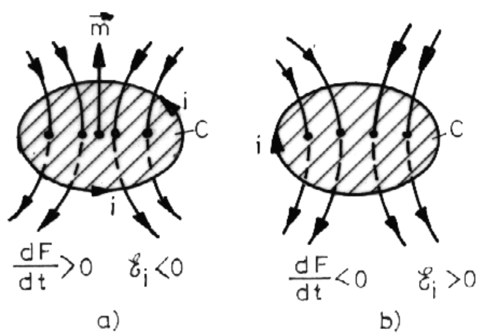

Figura 5.2: *Sensul curentului indus într-un contur închis C şi fluxul magnetic prin suprafaţa S închisă de conturul C*

5.2. Curentul de deplasare

În paragraful 5.1. am arătat că un câmp magnetic variabil în timp generează un câmp electric (legea lui Faraday). Acum ne punem întrebarea: oare un câmp electric variabil în timp generează un câmp magnetic? Răspunsul este da. În continuare vom justifica acest răspuns.

Mai întâi vom observa că legea generală a magnetostaticii

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}_C \tag{5.25}$$

este în contradicție cu ecuația de continuitate

$$div\,\vec{j}_C + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (5.26)$$

în cazul regimului variabil în timp.

Într-adevăr dacă aplic divergența la ecuația (5.25) obțin:

$$div\left(rot\,\vec{H}\right) = div\,\vec{j}_C \qquad (5.27)$$

Dar $div\left(rot\,\vec{H}\right) = 0$ pentru orice vector $\vec{H}$ (acestă expresie este identic nulă pentru orice vector $\vec{H}$) şi deci rezultă:

$$div\,\vec{j}_C = 0 \qquad (5.28)$$

În regim variabil în timp, $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ şi din (5.26) rezultă $div\,\vec{j}_C \neq 0$. Adică avem o contradicție între legile generale (5.25) şi (5.26). Această contradicție nu există în magnetostatică unde regimul static implică $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ şi deci $div\,\vec{j}_C = 0$.

Pentru a elimina această contradicție vom mai adăuga un termen la ecuația (5.25). Adică scriem sub forma:

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}_C + \vec{j}_d \qquad (5.29)$$

unde $\vec{j}_d$ este o densitate de curent care apare numai în regim variabil în timp. Ne punem problema să aflăm expresia lui $\vec{j}_d$ într-un caz simplu, reprezentat în figura 5.3. Circuitul din figura 5.3. este format dintr-o sursă de tensiune, *S,* şi un condensator plan, vidat legat la bornele sursei. Dacă *S* este o sursă de curent continuu, constatăm că prin circuit nu trece un curent electric. Dacă sursa *S* este o sursă de curent alternativ de frecvență ν, în circuit apare un curent cu intensitatea *I* care creşte cu creşterea lui ν, la o tensiune efectivă *U* constantă a sursei.

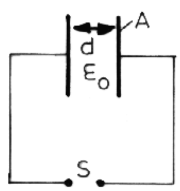

Figura 5.3: *Un condensator plan vidat aşezat într-un circuit cu o sursă de curent* S

Adică curentul *I* depinde de variațiile temporale ale tensiunii $U(t)$ aplicată la plăcile condensatorului. Această tensiune $U(t)$ este legată de sarcina electrică $Q(t)$ de pe o placă a condensatorului prin relația:

$$Q(t) = U(t)C \qquad (5.30)$$

unde *C* este capacitatea condensatorului cu aria unei plăci *A* şi distanța *d* dintre plăci. Adică:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad (5.31)$$

Intensitatea curentului prin circuit este:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \qquad (5.32)$$

Pe baza relațiilor (5.30) şi (5.31) ecuația (5.32) devine:

$$I = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{dU(t)}{dt} \qquad (5.33)$$

Dar tensiunea la bornele condensatorului $U(t) = E(t)d$, unde $E(t)$ este intensitatea câmpului electric între plăcile condensatorului. Deci ecuația (5.33) devine:

$$I = \varepsilon_0 A \frac{dE(t)}{dt} \qquad (5.34)$$

Dacă avem în vedere că inducția electrică în vid $D(t) = \varepsilon_0 E(t)$ și că $\frac{I}{A} = j_d$ este densitatea curentului dintre plăcile condensatorului ecuația (5.34) devine:

$$j_d = \frac{dD(t)}{dt} \qquad (5.35)$$

Această expresie reprezintă *densitatea curentului de deplasare* dintre plăcile condensatorului vidat. În cazul mai general când inducția electrică depinde și de coordonatele spațiale relația (5.35) se scrie:

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (5.36)$$

Adică *vectorul densitate de curent de deplasare* $\vec{j}_d$ *este dat de variația temporală a vectorului inducție electrică* $D(t)$. Cu alte cuvinte, un câmp electric variabil în timp generează un curent electric de deplasare cu densitatea dată de ecuația (5.36):

Dacă introducem ecuația (5.36) în ecuația (5.29) obținem:

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (5.37)$$

Această relație ne spune că sursa de câmp magnetic poate fi formată dintr-un curent de conducție cu densitatea $\vec{j}_C$ și/sau dintr-un câmp electric variabil în timp care generază curentul cu densitatea $\vec{j}_d$.

Astfel ecuația (5.37) rezolvă contradicția dintre ecuația de continuitate (5.26) și ecuația generală a magnetostaticii (5.35). În sensul că dacă aplicăm divergența la ecuația (5.37) obținem:

$$div\left(rot\,\vec{H}\right) = div\,\vec{j}_C + div\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \qquad (5.38)$$

Cum $div\left(rot\,\vec{H}\right) = 0$ rezultă

$$div\,j_C = -\frac{\partial}{\partial t}\left(div\left(\vec{D}\right)\right) \qquad (5.39)$$

Din legea lui Gauss $div\,\vec{D} = \rho$ și ecuația (5.39) devine tocmai ecuația de continuitate (5.26). Deci, ecuația (5.37) este corectă în cazul regimului variabil în timp și conține ca un caz particular ecuația (5.35) pentru regimul staționar.

În concluzie, putem observa că legea lui Faraday arată că un câmp magnetic variabil în timp generează un câmp electric și legea lui Maxwell (5.37) arată că un câmp electric variabil în timp generează un câmp magnetic, care se adaugă la cel creat de curentul electric de densitate $\vec{j}_C$.

5.3. Ecuațiile lui Maxwell

Ecuațiile lui Maxwell sunt legile de bază ale câmpului electromagnetic în teoria clasică. Ele leagă vectorii $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ şi $\vec{H}$, care reprezintă câmpul electromagnetic, de sursele sale şi de caracteristicile mediului în care se găseşte câmpul electromagnetic. Aceste ecuații sunt:

$$1)\, div\,\vec{D} = \rho \qquad 2)\, div\,\vec{B} = 0$$
$$3)\, rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad 4)\, rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{5.40}$$

Prima ecuație a lui Maxwell exprimă faptul că un câmp electric, cu inducția electrică $\vec{D}$, este generat de o sarcină electrică, cu densitatea ρ. Această ecuație reprezintă de fapt legea lui Gauss sub formă locală pe care am studiat-o anterior.

Ecuația a doua a lui Maxwell, care este de aceeaşi formă cu prima, exprimă faptul că nu există “sarcini magnetice”, analoge celor electrice, care să genereze câmp magnetic. A treia ecuație a lui Maxwell este de fapt legea lui Faraday sub formă locală şi exprimă faptul că un câmp magnetic variabil în timp generează un câmp electric. A patra ecuație este identică cu ecuația (5.37) din paragraful anterior (în care am omis indicele c de la densitatea de curent $\vec{j}$). Ea arată că un câmp magnetic de intensitate $\vec{H}$ este generat de un curent de conducție cu densitatea $\vec{j}$ şi de un curent de deplasare cu densitatea dată de $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; adică de variația temporală a inducției câmpului electric.

Cele patru ecuații ale lui Maxwell sunt scrise sub formă vectorială şi au în partea stângă expresii dependente de vectorii $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ şi $\vec{H}$, care reprezintă câmpul, iar în partea dreaptă mărimile care reprezintă sursele de câmp situate într-un mediu. Ele sunt scrise *într-un sistem de referință inerțial* în care *mediul este în repaus*. Într-un astfel de mediu sunt valabile relațiile:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \ \text{ şi } \ \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \tag{5.41}$$

Aceste ecuații se numesc *ecuațiile de material* fiind exprimate în funcție de polarizarea electrică, $\vec{P}$, a mediului şi de magnetizarea sa, $\vec{M}$. Ecuațiile de material se mai scriu şi sub forma

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \ \text{ şi } \ \vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{5.42}$$

în care mediul este reprezentat prin permitivitatea ε, permeabilitatea, μ şi conductivitatea electrică, σ. Ultima ecuație din (5.42) este forma locală a legii lui Ohm. Mediile în care sunt valabile relațiile de material (5.42) sunt medii liniare, omogene şi isotrope. În mediile *anizotrope* ε, μ şi σ nu mai sunt mărimi scalare, ele devin mărimi tensoriale. În mediile liniare şi *neomogene* constantele ε, μ şi σ sunt funcţie de coordonatele punctului. În sfârşit, mediile neliniare sunt cele în care relaţiile (5.42) nu mai sunt liniare şi ele devin de forma unor polinoame de grad doi în E, pentru mediile neliniare pătratice şi polinoame de ordinul trei pentru mediile neliniare de ordinul trei.

Menţionăm că legea lui Ohm este o lege de material ca şi ecuaţia de continuitate:

$$div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.43}$$

Pe baza ecuaţiilor de material, putem arăta că ecuaţiile lui Maxwell nu sunt independente. De exemplu, dacă aplicăm la ecuaţia a patra divergenţa obţinem

$$div\left(rot\,\vec{H}\right) = div\,\vec{j} + div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{5.44}$$

Cum $div\left(rot\,\vec{H}\right) = 0$ pentru orice $\vec{H}$ rezultă

$$div\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(div\,\vec{D}\right) = 0 \tag{5.45}$$

Comparăm ecuaţia (5.43) cu ecuaţia (5.45) şi ajungem la prima ecuaţie a lui Maxwell. Adică am pornit de la ecuaţia a patra şi am ajuns la prima ecuaţie. Deci ecuaţia de continuitate face ca aceste ecuaţii să nu fie independente.

Câmpul electromagnetic caracterizat de ecuaţiile lui Maxwell se află într-un mediu de volum V închis de o suprafaţă S. Pe această suprafaţă de graniţă câmpul electromagnetic satisface anumite condiţii la limită ca şi în cazul particular al câmpului electrostatic. Aceste condiţii la limită dintre două medii 1 şi 2 se scriu

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_S, \quad E_{1t} = E_{2t}, \quad B_{1n} = B_{2n} \text{ şi } H_{1t} - H_{2t} = j_S \tag{5.46}$$

unde indicele n se referă la componenta normală a vectorului şi indicele t la componenta tangenţială; σ_S este densitatea sarcinei libere pe suprafaţa de separare S a celor două medii 1 şi 2, iar j_S este densitatea de curent pe suprafaţa de separare S a celor două medii. Vectorul $\vec{j}_S$ este orientat în lungul suprafeţei în sensul curentului care curge prin acea suprafaţă. Se înţelege în anumite cazuri σ_S şi j_S pot fi şi zero.

Cunoscând condiţiile la limită (la graniţă), (5.46) şi vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ în momentul iniţial $t = 0$ sistemul de ecuaţii Maxwell pot fi rezolvate şi se obţine o soluţie unică. Această soluţie reprezintă câmpul electromagnetic din volumul V bine determinat .

Ecuaţiile lui Maxwell sunt ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale şi reprezintă legi locale. Formele globale (sau integrale) ale legilor locale date de ecuaţiile Maxwell se deduc din acestea şi sunt următoarele:

$$\begin{gathered} 1i)\oiint_S \vec{D}d\vec{A} = Q_{\text{int}\,S}; \qquad 2i)\oiint_S \vec{B}d\vec{A} = 0; \\ 3i)\oint_C \vec{E}d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}d\vec{A}; \quad 4i)\oint_C \vec{H}d\vec{s} = \iint_S \vec{j}d\vec{A} + \iint_S \dot{\vec{D}}d\vec{A}. \end{gathered} \tag{5.47}$$

Dacă comparăm forma diferenţială (5.40) a ecuaţiilor Maxwell cu forma integrală (5.47) a acestora observăm că în locul divergenţei unui vector a apărut fluxul acelui vector prin suprafaţa închisă *S* iar în locul rotorului a apărut integrala curbilinie pe o curbă *C* închisă care se sprijină pe suprafaţa *S*.

Prima ecuaţie *1i* este de fapt forma integrală a legii lui Gauss care spune că liniile câmpului electric sunt linii deschise care pornesc, sau vin, la sarcinile electrice Q_{inc} din interiorul suprafeţei închise *S*.

Ecuaţia 2*i* arată că liniile câmpului magnetic care intră într-o suprafaţă *S* închisă ies totdeauna din acea suprafaţă. Acest lucru se întâmplă dacă aceste linii magnetice sunt linii (curbe) închise.

Ecuaţia 3*i* este legea inducţiei electromagnetice şi arată că tensiunea electromotoare în circuitul *C* este dată de variaţia temporală a fluxului câmpului magnetic printr-o suprafaţă *S* care se spijină pe curba *C*.

În mod analog, ecuaţia 4*i* arată că tensiunea magnetomotoare din circuitul închis *C* este dată de intensitatea curentului (sau fluxul densităţii de curent) de conducţie prin suprafaţa *S* şi de variaţia temporală a intensităţii curentului de deplasare prin suprafaţa *S*.

O dezvoltare a teoriei lui Maxwell asupra câmpului electromagnetic o reprezintă teoria electronică clasică a lui Lorentz. Această teorie are la bază ecuaţiile Maxwell-Lorentz şi porneşte de la structura microscopică a mediului. Într-un punct oarecare din spaţiu microscopic există un câmp electric microscopic cu intensitatea $\vec{e}$ şi un câmp magnetic cu intensitatea $\vec{h}$ care rezultă din sarcinile şi curenţii microscopici (atomii). Aceste câmpuri microscopice satisfac ecuaţiile Maxwell-Lorentz care conduc la ecuaţiile lui Maxwell dacă trecem la scară macroscopică prin medierea mărimilor microscopice. De exemplu, câmpurile macroscopice $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ se obţin prin medierea celor microscopice: $\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle$ şi $\vec{B} = \mu_0 \langle \vec{h} \rangle$.

Am afirmat mai sus că ecuaţiile lui Maxwell sunt scrise într-un sistem de referinţă inerţial, *S*, în care mediul este în repaus. Adică mărimile fizice care intră în aceste ecuaţii sunt măsurate de un observator aflat în repaus faţă de mediul în care scriem ecuaţiile. Ce se întâmplă cu aceste ecuaţii ale lui Maxwell când trecem la un alt sistem de referinţă inerţial *S'?* Răspunsul este: ecuaţiile lui Maxwell sunt invariante la transformarea Lorentz care face trecerea de la un sistem de referinţă inerţial *S* la alt sistem de referinţă inerţial *S'*. Însă, componentele vectorilor $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ şi $\vec{H}$, se schimbă la trecerea de la un sistem *S* la altul *S'*. De exemplu, dacă *S'* se mişcă cu viteza *v* în direcţia axei $Ox \equiv O'x'$ faţă de sistemul *S* (care este în repaus faţă de mediu) componentele câmpurilor se schimbă în conformitate cu ecuaţiile:

$$
\begin{aligned}
&E'_{x'} = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad E'_{z'} = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
&B'_{x'} = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2}E_z}{\sqrt{1-v^2/c}}, \quad B'_{z'} = \frac{B_z - \frac{v}{c^2}E_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
&D'_{x'} = D_x, \quad D'_y = \frac{D_y - \frac{v}{c^2}H_z}{\sqrt{1-v^2/c}}, \quad D'_{z'} = \frac{D_z + \frac{v}{c^2}H_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
&H'_{x'} = H_x, \quad H'_y = \frac{H_y + vD_z}{\sqrt{1-v^2/c}} \quad H'_{z'} = \frac{H_z - vD_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}
\end{aligned}
\tag{5.48}
$$

Din aceste ecuații observăm că unul şi acelaşi câmp electromagnetic are componentele vectorilor $\vec{E},\vec{D},\vec{B}$ şi $\vec{H}$, perpendiculare pe direcția vitezei (componentele pe axele *Oy* şi *Oz* în exemplul nostru) diferite în cele două sisteme inerțiale, iar componentele paralele (după axa *Ox*) sunt invariante față de alegerea sistemului de referință inerțial. Aceste relații arată că atunci când într-un sistem inerțial avem numai câmp electric ($\vec{E} \neq 0 \;\; \vec{B} = 0$) în celălalt sistem inerțial avem şi câmp electric şi câmp magnetic ($\vec{E}' \neq 0,\ \vec{B}' \neq 0$) care sunt reciproc perpendiculari.

Pornind de la relațiile (5.48) putem arăta că produsul scalar dintre $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ este invariant față de transformarea Lorentz. Adică

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \vec{B}' \tag{5.49}$$

De asemenea, rămân invariante față de transformarea Lorentz expresiile:

$$\vec{H} \cdot \vec{D} = \vec{H}' \cdot \vec{D}'; \quad E'^2 - c^2 B'^2 = E^2 - c^2 B^2 \text{ şi } D'^2 - \frac{H'^2}{c^2} = D^2 - \frac{H^2}{c^2} \tag{5.50}$$

Aceste expresii sunt utile în exprimarea energiei câmpului electromagnetic.

5.4. Energia câmpului electromagnetic şi vectorul lui Poynting

Fie un câmp electromagnetic în volumul *V* închis de suprafața *S*. Vom presupune că acest câmp are o densitate de energie u şi o energie totală în volumul *V* dată de relația

$$U = \iiint_V u dV \tag{5.51}$$

De asemenea, vom presupune că o parte din această energie se scurge prin suprafața *S* în afara lui *V*. Această scurgere de energie este dată de fluxul de energie

$$\Phi = \oiint_S \vec{S} d\vec{A} \tag{5.52}$$

unde $\vec{S}$ este un vector care dă direcţia de scurgere a energiei precum şi mărimea acesteia,care se scurge prin unitatea de suprafaţă.

Să notăm cu $\dfrac{dL}{dt}$ rata lucrului mecanic executat de câmpul electromagnetic din interiorul lui V, asupra sarcinilor electrice din V. Acest lucru mecanic este transferat sarcinilor electrice prin creşterea energiilor lor cinetice sau transferat mediului sub formă de energie cinetică a particulelor sale (încălzirea mediului) sau sub formă de energie chimică, etc. Această putere dezvoltată de câmpul electromagnetic duce la formarea unor curenţi electrici în V cu densitatea $\vec{j}$.
Adică

$$\frac{dL}{dt} = \iiint_V \vec{j}\vec{E}dV \tag{5.53}$$

unde produsul scalar $\vec{j}\vec{E} = \rho_e j^2$ este puterea transformată în căldură prin efect Joule în unitatea de volum. ρ_e este rezistivitatea mediului care rezultă din forma locală $\vec{E} = \rho_e \vec{j}$ a legii lui Ohm.

Legea conservării energiei implică

$$-\frac{dU}{dt} = \oiint_S \vec{S}d\vec{A} + \frac{dL}{dt} \tag{5.54}$$

Adică scăderea (semnul minus) energiei câmpului electromagnetic din V este datorată scurgerii sale în afara lui V prin suprafaţa S şi lucrului mecanic executat pentru formarea unor curenţi electrici în interiorul lui V. Ecuaţia (5.54) în conformitate cu (5.51) şi (5.53) mai scrie:

$$-\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = \oiint_S \vec{S}d\vec{A} + \iiint_V \vec{j}\vec{E}dV \tag{5.55}$$

Din teorema lui Gauss avem

$$\oiint_S \vec{S}d\vec{A} = \iiint_V div\,\vec{S}\,dV \tag{5.56}$$

şi ecuaţia (5.55) devine

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + div\,\vec{S} + \vec{j}\vec{E}\right)dV = 0 \tag{5.57}$$

Cum (5.57) este valabilă pentru orice volum V rezultă *forma diferenţială* a principiului conservării energiei

$$\vec{j}\vec{E} = -\frac{\partial u}{\partial t} - div\,\vec{S} \tag{5.58}$$

Această formă diferenţială este cunoscută sub numele de teorema lui Poynting, iar vectorul $\vec{S}$ este *numit vectorul lui Poynting*.

În conformitate cu ecuaţia sa de definiţie (5.52) vectorul $\vec{S}$ reprezintă densitatea fluxului de energie electromagnetică prin suprafaţa S care închide pe V.

În continuare, vom exprima pe $\vec{S}$ şi pe $\frac{\partial u}{\partial t}$ în funcţie de vectorii $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ şi $\vec{H}$ care reprezintă câmpul în *V*. Din ecuaţia a patra a lui Maxwell rezultă

$$\vec{j}\vec{E} = \left(rot\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E} = E \cdot rot\,\vec{H} - \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{5.59}$$

Din identitatea vectorială

$$div\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{H}\,rot\,\vec{E} - \vec{E}\,rot\,\vec{H} \tag{5.60}$$

şi din (5.59) rezultă

$$\vec{j}\vec{E} = -div\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) + \vec{H}\,rot\,\vec{E} - \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{5.61}$$

Dacă comparăm ecuaţiile (5.58) şi (5.61) obţinem

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{5.62}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{5.63}$$

Se observă din ecuaţia (5.62) că vectorului Poynting care reprezintă densitatea fluxului de energie al câmpului electromagnetic este orientat în direcţia perpendiculară pe $\vec{E}$ şi pe $\vec{H}$. Vectorul lui Poynting ne spune că dacă într-un volum *V* închis de suprafaţa *S* avem un câmp electromagnetic atunci acest câmp se propagă şi în afara volumului *V* cu o densitatea de flux de energie dată de vectorul $\vec{S}$. Această propagare a câmpului electromagnetic în afara volumului de generare a sa constituie *o undă electromagnetică*.

Din cauza propagării câmpului electromagnetic densitatea de energie a câmpului scade în timp în conformitate cu ecuaţia (5.63). Această expresie a variaţiei temporale a densităţii de energie în cazul unui mediu liniar, omogen şi izotrop $\left(\vec{B} = \mu\vec{H}, \vec{D} = \varepsilon\vec{E}\right)$ se scrie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{H}\frac{\partial\left(\mu\vec{H}\right)}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{uH^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right) \end{aligned} \tag{5.64}$$

Cum

$$\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = u_e \text{ şi } \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = u_m \tag{5.65}$$

reprezintă densitatea de energie a câmpului electric şi respectiv, densitatea de energie a câmpului magnetic rezultă

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B} \tag{5.66}$$

Totuşi relaţia (5.63) este mai generală decât cea din (5.66). Astfel că pe baza ei putem identifică $\left(\frac{\partial u_e}{\partial t}\right) = \vec{E}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$ şi

$$u_e = \int_{0,0}^{E,t} \frac{\partial u_e}{\partial t} dt = \int_{0,0}^{E,t} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dt = \int_0^E \vec{E} d\vec{D} \tag{5.67}$$

În mod analog avem $\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right) = \vec{H}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$ şi

$$u_m = \int_0^B \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt = \int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B} \tag{5.68}$$

În ecuaţiile (5.67) şi (5.68) vectorul $\vec{D}$ este considerat o funcţie de $\vec{E}$ şi timp, iar vectorul $\vec{H}$ este funcţie de $\vec{B}$ şi timp.

Dacă $\vec{v}$ este viteza de propagare a câmpului electromagnetic atunci densitatea fluxului de energie, $\vec{S}$ se leagă de densitatea de energie *u* prin relaţia

$$\vec{S} = u \cdot \vec{v} \tag{5.69}$$

Media temporală a lui $\vec{S}$, o notăm $\left\langle \vec{S} \right\rangle$ şi o numim intensitatea radiaţiei electromagnetice. Aceasta se leagă de densitatea de energie mediată în timp $\langle u \rangle$ prin

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \langle u \rangle \vec{v} \tag{5.70}$$

Menţionăm că în relaţiile (5.62) şi (5.63) vectorii care definesc câmpul electromagnetic sunt mărimi reale. Totuşi, în multe cazuri câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt consdierate mărimi complexe. În aceste cazuri

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2} Re\left(\vec{E}^* \times \vec{H}\right) \tag{5.71}$$

şi

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} Re\left(\vec{E} \cdot \vec{D}^* + \vec{H} \cdot \vec{B}^*\right) \tag{5.72}$$

unde semnul * înseamnă conjugata complexă a mărimii respective. Factorii $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{4}$ provin din faptul că $Re\,\vec{A} = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)$

În finalul acestui paragraf menţionăm că intensitatea radiaţiei $\left\langle \vec{S} \right\rangle$ se măsoară în $\frac{W}{m^2}$ iar densitatea de energie în $\langle u \rangle$ în $\frac{J}{m^2}$ în S.I.

5.5. Aplicaţii şi probleme

P5.1. Să se demonstreze egalitatea $div\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{H}\, rot\, \vec{E} - \vec{E}\, rot\, \vec{H}$ folosind metoda proiectării vectorilor pe un sistem de axe *xyz*.

Rezolvare:

Produsul vectorial $\vec{E}\times\vec{H}$ proiectat pe axe duce la

$$\vec{E}\times\vec{H}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ E_x & E_y & E_z\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(E_yH_z-E_zH_y\right)+\vec{j}\left(E_zH_x-E_xH_z\right)+ \quad (1)$$
$$+\vec{k}\left(E_xH_y-E_yH_x\right)$$

Din expresia divergenţei unui vector $\vec{V}$ rezultă

$$div\,V=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

şi deci

$$div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(E_yH_z-E_zH_y\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(E_zH_x-E_xH_z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_xH_y-E_yH_x\right) \quad (2)$$

După derivare egalitatea (2) devine

$$div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=H_z\frac{\partial E_y}{\partial x}+E_y\frac{\partial H_z}{\partial x}-H_y\frac{\partial E_z}{\partial x}-E_z\frac{\partial H_y}{\partial x}+H_x\frac{\partial E_z}{\partial y}+E_z\frac{\partial H_x}{\partial y}+$$
$$+H_z\frac{\partial E_x}{\partial y}-E_x\frac{\partial H_z}{\partial y}+H_y\frac{\partial E_x}{\partial z}+E_x\frac{\partial H_y}{\partial z}-H_x\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\partial H_x}{\partial z}=$$
$$=H_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+H_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+H_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)+E_x\left(\frac{\partial H_y}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)+ \quad (3)$$
$$+E_y\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)+E_z\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)$$

Din definiţia rotorului avem

$$rot\,\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \quad (4)$$

Produsul scalar $\vec{H}\,rot\,\vec{E}$ devine:

$$\vec{H}\,rot\,\vec{E}=H_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+H_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+H_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \quad (5)$$

În mod analog avem

$$\vec{E}\,rot\,\vec{H}=E_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)+E_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+E_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right) \quad (6)$$

Dacă scădem ecuaţia (6) din (5) obţinem tocmai ultima parte a ecuaţiilor (3). Deci

$$div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\vec{H}\,rot\,\vec{E}-\vec{E}\,rot\,\vec{H}$$

P5.2. a) Să se scrie ecuațiile lui Maxwell într-un mediu liniar, omogen şi izotrop, fără sarcini electrice libere şi fără curent de conducție, în cazul în care câmpul electric este orientat tot timpul după axa *Ox* şi câmpul magnetic este orientat după axa *Oy* b) Care sunt mărimile vectorului lui Poynting şi ale densității de energie a câmpului electromagnetic?

Rezolvare:

Forma generală a ecuațiilor lui Maxwell se exprimă prin

$$div\vec{D} = \rho \qquad div\vec{B} = 0$$
$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1}$$

În cazul mediului liniar, omogen şi izotrop avem

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \tag{2}$$

Deoarece mediul nu are sarcini libere şi curent de conducție rezultă

$$\rho = 0 \text{ şi } \vec{j} = 0 \tag{3}$$

Dacă introducem ecuația (2) şi ecuația (3) în ecuația (1) obținem ecuațiile vectoriale

$$div\vec{E} = 0 \qquad div\vec{H} = 0$$
$$rot\vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad rot\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

Aceste ecuații vectoriale scrise cu proiecțiile vectorilor pe axele unui sistem de referință *Oxyz* devin

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k}\right)$$
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}\right) \tag{5}$$

unde $\vec{i}, \vec{j}$ şi $\vec{k}$ sunt versorii celor trei axe.

Din datele problemei rezultă $E_x \neq 0,\ E_y = 0,\ E_z = 0$ şi $H_x = 0,\ H_y \neq 0,$ $H_z = 0$. Având în vedere aceste date în ecuațiile (5),acestea devin

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$
$$\vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} \quad \vec{i}\left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(-\frac{\partial H_y}{\partial x}\right) = \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}\vec{i} \tag{6}$$

Ultimile două ecuații vectoriale sunt echivalente cu următoarele ecuații scalare (egalăm proiecțiile)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Deci, în acest caz, când $\vec{E}$ este orientat după axa *Ox* şi $\vec{H}$ orientat după axa *Oy,* din ecuațiilea (6) şi (7) scriem ecuațiilea lui Maxwell

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Am obținut şase ecuații cu derivate parțiale. Dacă vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ ar fi avut componente diferite de zero după toate cele trei axe am fi obținut opt ecuații scalare.

b) Vectorul lui Poynting $\vec{S}$ este definit prin relația

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{9}$$

Această relație se scrie şi sub forma

$$S_x\vec{i} + S_y\vec{j} + S_z\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \tag{10}$$

Cum $E_y = E_z = H_x = H_z = 0$ rezultă din (10)

$$S_x\vec{i} + S_y\vec{j} + S_z\vec{k} = E_x H_y \vec{k} \tag{11}$$

Din această egalitate vectorială rezultă

$$S_x = 0 \quad S_y = 0 \quad S_z \neq 0$$

şi mărimea lui $\vec{S}$ este

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z} = \sqrt{S_z^2} = S_z = E_x H_y \tag{12}$$

Deci, vectorul lui Poynting în acest caz este orientat după direcția oz perpendiculară pe direcțiile lui $\vec{E}$ (axa *Ox*) şi $\vec{H}$ (axa *Oy*). El are mărimea dată de ecuația (12).

Densitatea de energie a câmpului electromagnetic este dată de expresia

$$u = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} \tag{13}$$

Pe baza ecuațiilor (2) şi a datelor problemei ,din ecuația (13),rezultă

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{H}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E_x^2 + \frac{1}{2}\mu H_y^2$$