Metoda functiilor hiperbolice
în studiul sirurilor lui
Fibonacci si Lucas

▪Sirurile lui Fibonacci si Lucas sunt definite prin recurentele urmatoare :

$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ $F_1=F_2=1$

$L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$ $L_1=1$ si $L_2=3$

Avem în tabelul urmator primele 12 valori :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322

▪Formulele lui Binet :

Notam cu a si b radacinile ecuatiei X^2-X-1=0 :

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{si} \quad b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Atunci avem exprimarea urmatoare pentru F_n si L_n :

$$F_n=\frac{a^n-b^n}{a-b} \quad \text{si} \quad L_n=a^n+b^n \;;$$

Aceasta se întampla deoarece aceste formulele verifica recurentele din definitia sirurilor F_n si L_n cat si conditiile initiale .

▪Legatura cu functiile hiperbolice **ch** si **sh** :

Vom folosi urmatoarea notatie simpla dar rar utilizata , pe care am gasit-o în revista frantuzeasca A.P.M.E.P, editia septembrie 1980 :

$$[A,B]_n=\begin{cases} A \text{ daca n este impar} \\ B \text{ daca n este par} \end{cases}.$$

In revista se noteaza de asemenea

$$\ln a=\alpha \quad , \quad \alpha n=x \quad , \quad \alpha m=y \;.$$

Cu aceste notatii se pot scrie urmatoarele identitati :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}\ kx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{5}\,F_{kn}, L_{kn}\right]_{kn} \\ \mathrm{sh}\ kx = \frac{1}{2}\left[L_{kn}, \sqrt{5}\,F_{kn}\right]_{kn} \\ \mathrm{ch}(x+y) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{5}\,F_{n+m}, L_{n+m}\right]_{n+m} \\ \mathrm{sh}(x+y) = \frac{1}{2}\left[L_{n+m}, \sqrt{5}\,F_{n+m}\right]_{n+m} \end{cases} \qquad \text{(R 0)}$$

In ultimele 2 formule se poate înlocui semnul ‘+’ al lui y cu semnul ‘-‘ odata cu semnul lui m.

Formulele se pot verifica direct analizandu-le dupa paritatea sau imparitatea lui k, n, m.

Orice identitate cu functii hiperbolice care au un argument de forma kx+k'y produce în baza substitutiilor din (R 0) una sau mai multe relatii în care intervin sirurile F_n si L_n .

▪Aplicatia 1 :

Consiseram identitatea
$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ care pe baza substitutiilor din (R 0) produce urmatoarele 2 identitati:

pentru n impar $\quad \frac{5F_n^2}{4} - \frac{L_n^2}{4} = 1$

pentru n par $\quad \frac{L_n^2}{4} - \frac{5F_n^2}{4} = 1$

De aici rezulta $\quad L_n^2 - 5F_n^2 = 4\cdot(-1)^n \quad$ (R 1) $\quad$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

▪Aplicatia 2 :

Consiseram identitatile

$\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y) = 2\,\mathrm{chx}\,\mathrm{chy}$ si $\mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y) = 2\,\mathrm{shx}\,\mathrm{chy}$.

Analizand cele 4 cazuri care apar în functie de paritatile lui n si m obtinem din (R 0) relatiile :

$$\begin{cases} F_{n+m} + F_{n-m} = \left[L_n F_m, F_n L_m\right]_m \\ L_{n+m} + L_{n-m} = \left[5F_n F_m, L_n L_m\right]_m \end{cases} \qquad \text{(R 2)}$$

Pentru m=1 obtinem identitatile :

$$\begin{cases} L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n \\ F_{n+1} + F_{n-1} = L_n \end{cases}$$

Din identitatile

$$\mathrm{ch}(x+y)-\mathrm{ch}(x-y)=2\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y \quad \text{si} \quad \mathrm{sh}(x+y)-\mathrm{sh}(x-y)=2\,\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y\,.$$

si din substitutiile (R 0) deducem in mod asemanator relatiile:

$$\begin{cases} F_{n+m}-F_{n-m}=[L_nF_m,F_nL_m]_{m-1} \\ L_{n+m}-L_{n-m}=[5F_nF_m,L_nL_m]_{m-1} \end{cases} \quad (R\ 3)$$

▪ Aplicatia 3 :

Adunand relatiile (R 2) cu (R 3) obtinem fara dificultate identitatile :

$$\begin{cases} 2L_{n+m}=L_nL_m+5F_nF_m \\ 2F_{n+m}=F_nL_m+L_nF_m \end{cases} \quad (R\ 4)$$

▪ Aplicatia 4 :

Evident ca sirurile F_n si L_n se pot generaliza pentru orice $n\in\mathbf{Z}$.
Avem valorile $F_0=0$, $L_0=2$ si $F_{-1}=1$, $L_{-1}=-1$. Acestea se deduc folosind relatia de recurenta din definitia sirurilor si valorile lor initiale.

-punand in relatiile (R 4) m=1 si m= -1 obtinem identitatile :

$$\begin{cases} 2F_{n+1}=F_n+L_n \\ 2F_{n-1}=L_n-F_n \\ 2L_{n+1}=L_n+5F_n \\ 2L_{n-1}=5F_n-L_n \end{cases}$$

▪ Aplicatia 5 :

Consideram acum identitatile urmatoare

$$\begin{cases} \mathrm{sh}(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x-y)=\mathrm{sh}^2x-\mathrm{sh}^2y \\ \mathrm{ch}(x+y)\cdot\mathrm{ch}(x-y)=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2y \end{cases}$$

Analizand substitutiile (R 0) dupa paritatile lui n si m obtinem patru expresii pentru $F_{n+m}F_{n-m}$ si pentru $L_{n+m}L_{n-m}$; tinand cont de (R 1) putem condensa rezultatele in urmatoarele doua identitati :

$$F_{n+m}F_{n-m}-F_n^2=(-1)^{n+m+1}F_m^2 \quad \text{si} \quad L_{n+m}L_{n-m}-L_n^2=(-1)^{n+m}L_m^2-4\cdot(-1)^n \qquad (R\ 5)$$

Prima este formula lui Catalan care a fost descoperita in 1886 iar a doua este o formula probabil noua .

▪ Aplicatia 6 :

Punand in (R 5) m=1 si apoi m=2 vom gasi identitatile urmatoare :

$$\begin{cases} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \\ F_{n+2}F_{n-2} - F_n^2 = (-1)^{n+1} \\ L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5\cdot(-1)^{n+1} \\ L_{n+2}L_{n-2} - L_n^2 = 5\cdot(-1)^n \end{cases}$$

In prima din aceste ultime 4 formule recunoastem relatia lui Simson.

In concluzie invitam si cititorul sa gaseasca noi relatii intre sirurile lui Fibonacci si Catalan utilizand alte identitati intre functiile hiperbolice.

Nota : prezenta lucrare este elaborata pe baza articolelor aparute in revista frantuzeasca   A.P.M.E.P. in anul 1980..

Prof. Velcsov Gheorghe Ioan

Powered by http://www.referat.ro/
cel mai tare site cu referate