2. Sisteme de ecuații neliniare

În acest capitol abordăm problema rezolvării numerice a sistemelor de ecuații algebrice neliniare.
Considerăm următorul sistem de ecuații

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ .... \\ f_n(x_1,x_2,...,x_n)=0, \end{cases} \tag{1}$$

în care cel puțin una din funcțiile f_i , $i=\overline{1,n}$ nu este liniară. Sub formă vectorială sistemul se scrie

$$F(x)=0\,, \tag{2}$$

unde

$$x=(x_1,x_2,...,x_n)^T \quad \text{şi} \quad F(x)=\left[f_1(x_1,...,x_n),..,f_n(x_1,...,x_n)\right]^T$$

Dacă adunăm x în ambii membri şi notăm cu $G(x)=x+F(x)$, sistemul (2) se poate pune sub forma echivalentă

$$x=G(x) \tag{3}$$

Evident, există şi alte metode de a pune sistemul (2) sub forma (3).

Exemplul 1.

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2)\equiv 2x_1^2+x_2^2-5=0 \\ f_2(x_1,x_2)\equiv x_1+2x_2-3=0 \end{cases} \tag{4}$$

Se observă că prima ecuație nu este liniară. Acest sistem se poate pune sub forma echivalentă

$$\begin{cases} x_1=2x_1^2+x_2^2-5+x_1\equiv g_1(x_1,x_2) \\ x_2=x_1+3x_2-3\equiv g_2(x_1,x_2) \end{cases}. \tag{4'}$$

Sistemul fiind foarte simplu se poate rezolva cu metoda substituției. Înlocuind $x_1=3-2x_2$ în prima ecuație obținem $9x_2^2-24x_2+13=0$, ecuație care admite rădăcinile $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{3}}{3}$.

Aşadar soluțiile exacte ale sistemului sunt

$$M_1\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{3},\frac{4+\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{şi} \quad M_2\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{3},\frac{4-\sqrt{3}}{3}\right).$$

Fie $D=[1,2]\times\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ o vecinătate a punctului M_2. În această vecinătate sistemul (4) se poate pune sub forma echivalentă

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{\dfrac{5-x_2^2}{2}}\equiv\tilde{g}_1(x_1,x_2) \\ x_2=\dfrac{1}{2}(3-x_1)\equiv\tilde{g}_2(x_1,x_2) \end{cases} \tag{4''}$$

(4') şi (4") sunt variante echivalente (de tipul (3)) ale sistemului (4), în vecinătatea punctului M_2.

În continuare prezentăm două metode numerice de rezolvare aproximativă a sistemelor neliniare.

§2.1. Metoda aproximațiilor succesive

Fie $D\subset\mathbb{R}^n$ o mulțime convexă, mărginită şi închisă şi fie sistemul

$$x=G(x)\ ,\ x\in D.$$

Presupunem de asemenea că $G\in C^1(D)$. În aceste condiții există

$$m_{ij}=\sup_{x\in D}\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right|\ ,\ i=\overline{1,n}\quad j=\overline{1,n}\quad .$$

Notăm cu

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Teorema 1. *Dacă* $G\in C^1(D)$, $G(D)\subset D$ *şi* $\|M\|_\infty<1$, *atunci sistemul* $x=G(x)$ *admite o singură soluție în domeniul D, care se află cu metoda aproximațiilor succesive.*

Demonstrație. Fie $x\in D$ şi $y\in D$ oarecare. Din Teorema lui Lagrange pentru funcții de mai multe variabile, rezultă că pentru orice $i=\overline{1,n}$, există

$$\xi_i=x+\theta_i(y-x), 0<\theta_i<1,$$

astfel încât

$$g_i(x) - g_i(y) = \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(\xi_i)(x_1 - y_1) + \ldots + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(\xi_i)(x_n - y_n) \ .$$

Ținând seama că

$$\left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right| \le m_{ij}, (\forall) x \in D,$$

rezultă

$$|g_i(x) - g_i(y)| \le m_{i1}|x_1 - y_1| + \ldots + m_{in}|x_n - y_n| \le \|x - y\|_\infty \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$$

şi mai departe

$$\|G(x) - G(y)\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |g_i(x) - g_i(y)| \le \|x - y\|_\infty \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \|x - y\|_\infty \|M\|_\infty \ .$$

Cum $\|M\|_\infty < 1$, rezultă că aplicația $G : D \to D$ este o contracție.

Conform teoremei de punct fix a lui Banach rezultă că există $x^* \in D$, unic, astfel încât $x^* = G(x^*)$. Aşadar x^* este soluția unică a sistemului (3) din domeniul D. Această soluție se află cu metoda aproximațiilor succesive. Fie $x^{(0)} \in D$ oarecare şi fie şirul aproximațiilor succesive

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), k \ge 0 \, .$$

Acest şir este convergent în R^n şi limita sa $x^* = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}$ este soluția sistemului (3) şi deci a sistemului echivalent (1), respectiv (2). Teorema lui Banach ne dă şi evaluarea erorii şi anume

$$\left\| x^{(k)} - x^* \right\|_\infty \le \frac{\|M\|_\infty^k}{1 - \|M\|_\infty} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty . \qquad ❑ \qquad (5)$$

Observația 1. *Teorema rămâne valabilă şi dacă norma* $\|M\|_\infty$ *se înlocuieşte cu altă normă de matrice, de exemplu* $\|M\|_1$ *sau* $\|M\|_2$.

Considerăm din nou sistemul (4) din exemplul 1. În domeniul $D = [1,2] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$, acest sistem este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{5 - x_2^2}{2}} \equiv g_1(x_1, x_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(3 - x_1) \equiv g_2(x_1, x_2) \end{cases} .$$

În acest domeniu, sistemul admite o singură soluție şi anume

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{3} \approx 1.4880338 \\ x_2 = \dfrac{4-\sqrt{3}}{3} \approx 0.7559831 \end{cases}.$$

Deoarece $x_1 \in [1,2]$ şi $x_2 \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ rezultă

$$\frac{1}{2} \le \frac{3-x_1}{2} = g_2(x_1,x_2) \le \frac{3}{2} \quad \text{şi} \quad \sqrt{\frac{11}{8}} \le \sqrt{\frac{5-x_2^2}{2}} = g_1(x_1,x_2) \le \sqrt{\frac{19}{8}},$$

deci $1 \le g_1(x_1,x_2) \le 2$.

Aşadar, dacă $(x_1,x_2) \in D$ atunci $(g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)) \in D$.

În continuare avem

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 0 \;,\; \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = -\frac{x_2}{\sqrt{10-2x_2^2}} \;;\; \frac{\partial g_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} \;;\; \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 0$$

$$m_{11} = m_{22} = 0 \;;\; m_{12} = \frac{3}{\sqrt{22}} \;;\; m_{21} = \frac{1}{2}$$

$$\|M\|_\infty = \|M\|_1 = \frac{3}{\sqrt{22}} < 1 \quad \text{şi} \quad \|M\|_2 = \sqrt{\frac{29}{44}} < 1.$$

Alegem $x_1^{(0)} = 1.5$ şi $x_2^{(0)} = 1$ (centrul dreptunghiului).

Se obţin următoarele valori pentru şirul aproximaţiilor succesive

Nr. de iteraţii	0	1	2	3	4	5	6
x_1	1.5	1.414	1.490	1.478	1.488	1.487	1.488
x_2	1.0	0.750	0.793	0.755	0.761	0.756	0.756

În continuare prezentăm metoda aproximaţiilor succesive pentru o singură ecuaţie neliniară.

Fie deci ecuaţia

$$f(x) = 0 \;,\; x \in [a,b].$$

Această ecuaţie se pune sub forma echivalentă

$$x = g(x) \;,\quad x \in [a,b].$$

Din Teorema 1 rezultă că dacă

$$g \in C^1[a,b] \;,\quad g:[a,b] \to [a,b] \quad \text{şi} \quad \|g'\| = \sup\{|g'(x)| \;;\; x \in [a,b]\} < 1$$

atunci ecuaţia admite o singură rădăcină în intervalul $[a,b]$ şi aceasta este $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, unde $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \ge 0$, iar $x_0 \in [a,b]$ este arbitrar.

Exemplu 2. Fie ecuaţia

$$x^5 - x - 0.2 = 0 \;;\; x \in [-0.3;-0.2] \;.$$

Forma echivalentă este

$$x = x^5 - 0,2 = 0,\ x \in [-0,3;-0,2]\ .$$

Avem $g' = 5x^4$ şi $\|g'\| = 0.0405 < 1$.

Se poate alege $x_0 = -0.3$. Şirul aproximațiilor succesive este

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k^5 - 0.2 \\ x_0 = -0.3 \end{cases} .$$

Se obțin următoarele valori pentru şirul aproximațiilor succesive

Numărul iterației	0	1	2	3	4	5
x	–0.3	–0.20243	–0.20034	–0.20032	–0.200322	–0.20032

§2.2. Metoda Newton - Raphson

Fie $D \subset \mathrm{R}^n$ o mulțime convexă, mărginită şi închisă şi fie sistemul neliniar

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \text{............................} \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

Presupunem că $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T \in D$ este o *soluție izolată* a sistemului (1) şi că $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)^T \in D$ este un punct *”apropiat”* de α $\left(\text{ adică } \left\|\alpha - x^{(0)}\right\| << 1\right)$. Presupunem, de asemenea, că funcțiile $f_i, i = \overline{1,n}$ sunt de clasă C^1 pe D. În aceste condiții, dacă $x \in D$ se află într-o vecinătate suficient de mică a punctului $x^{(0)}$ avem

$$f_i(x) \approx f_i(x^{(0)}) + df_i(x^{(0)})(x - x^{(0)}),\ \ i = \overline{1,n}\ .$$

Rezultă că sistemul (1) se poate înlocui cu sistemul liniar *apropiat*

$$\begin{cases} f_1(x^{(0)}) + df_1(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0 \\ \text{.......................................} \\ f_n(x^{(0)}) + df_n(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0 \end{cases} . \qquad (2)$$

Sub forma vectorială sistemul (2) se scrie

$$F(x^{(0)}) + dF(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0 \qquad (3)$$

unde

$$F = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \quad \text{şi} \quad dF = (df_1, ..., df_n)^T\ .$$

Deoarece sistemul (3) este *”apropiat”* de sistemul (1), ne aşteptăm ca soluția sa, $x^{(1)}$, să fie *”apropiată”* de soluția α a sistemului (1).

Aşadar $x^{(1)}$ verifică relaţia

$$F(x^{(0)}) + dF(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) = 0 .$$

În continuare considerăm sistemul liniar

$$F(x^{(1)}) + dF(x^{(1)})(x - x^{(1)}) = 0$$

şi ne aşteptăm ca soluţia sa, $x^{(2)}$, să se *”apropie”* mai mult de α. Aşadar $x^{(2)}$ verifică relaţia

$$F(x^{(1)}) + dF(x^{(1)})(x^{(2)} - x^{(1)}) = 0 .$$

În general, considerăm şirul de vectori $\{x^{(p)}\}$ cu proprietatea:

$$F(x^{(p)}) + dF(x^{(p)})(x^{(p+1)} - x^{(p)}) = 0 \tag{4}$$

şi ne aşteptăm că $\{x^{(p)}\}$ să conveargă la α.

Reamintim că pentru orice $a \in D$ şi orice

$$h = (h_1,\dots,h_n)^T \in R^n, \quad dF(a)(h) = J_F(a)h,$$

unde

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Dacă presupunem că $J_F(\alpha)$ este nesingulară, atunci, din continuitate, rezultă că există o vecinătate V a punctului $x = a$, astfel încât $J_F(x)$ este nesingulară pentru orice $x \in V$.

În această condiţie, din (4) rezultă

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - J_F^{-1}(x^{(p)})F(x^{(p)}), \; p \ge 0 \tag{5}$$

Teorema 1. *Fie* $D \subset \mathrm{R}^n$ *o mulţime convexă, mărginită şi închisă,* $\alpha \in D$ *o soluţie izolată a sistemului* $F(x) = 0$ *şi fie* $r > 0$ *astfel încât bila*

$$B_r(\alpha) = \left\{ x \in \mathrm{R}^n \;;\; \|x - \alpha\|_\infty < r \right\} \subset D .$$

Presupunem că

(i) $F \in C^2(D)$

(ii) *Există* $M_1 > 0$ *astfel încât* $\left\| J_F^{-1}(x) \right\|_\infty \le M_1$, $x \in B_r(\alpha)$

(iii) *Există* $M_2 > 0$ *astfel încât* $\left| \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| \le M_2$, $x \in B_r(\alpha)$,

oricare ar fi $i, j, k = \overline{1,n}$.

Atunci şirul $\{x^{(p)}\}$ *definit de* (5) *are proprietăţile:*

a) $\left\| x^{(p+1)} - \alpha \right\|_\infty \le \frac{1}{2} n^2 M_1 M_2 \left\| x^{(p)} - \alpha \right\|_\infty^2$

b) *Dacă* $\frac{1}{2} n^2 M_1 M_2 \left\| x^{(0)} - \alpha \right\|_\infty^2 < 1$, *atunci șirul* $\left\{ x^{(p)} \right\}$ *este convergent și* . $\lim_{p \to \infty} x^{(p)} = \alpha$.

Demonstrație. Din formula Taylor rezultă că pentru orice $k = \overline{1,n}$ și orice $p \in \mathrm{N}$, există un punct $\xi_k^{(p)}$ pe segmentul de dreaptă deschis de capete α și $x^{(p)}$ astfel încât

$$f_k(\alpha) - f_k(x^{(p)}) = df_k(x^{(p)})\,(\alpha - x^{(p)}) + \frac{1}{2!} d^2 f_k\left(\xi_k^{(p)}\right)\left(\alpha - x^{(p)}\right) \quad .$$

Ținând seama că

$$d^2 f_k(\xi_k^{(p)})(\alpha - x^p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_k^{(p)})(\alpha_i - x_i^{(p)})(\alpha_j - x_j^{(p)})$$

și de ipoteza (iii), rezultă

$$\left| f_k(\alpha) - f_k(x^{(p)}) - df_k(x^{(p)})(\alpha - (x^{(p)}) \right| \le \frac{1}{2} M_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_i - x_i^{(p)} \right| \left| \alpha_j - x_j^{(p)} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} M_2 n^2 \left\| \alpha - x^{(p)} \right\|_\infty^2 \ , \ (\forall) k = \overline{1,n} \, .$$

În continuare, avem

$$\left\| F(\alpha) - F(x^{(p)}) - dF(x^{(p)})(\alpha - x^{(p)}) \right\|_\infty = \frac{1}{2} M_2 n^2 \left\| \alpha - x^{(p)} \right\|_\infty^2 \qquad (6)$$

Pe de altă parte din (4) rezultă

$$-F(x^{(p)}) + dF(x^{(p)})(x^{(p)}) = dF(x^{(p)})(x^{(p+1)}) \qquad (7)$$

Cum $F(\alpha)$=0, din (6) și (7) obținem

$$\left\| dF(x^{(p)})(x^{(p+1)} - \alpha) \right\|_\infty \le \frac{1}{2} n^2 M_2 \left\| \alpha - x^{(p)} \right\|_\infty^2 \quad \text{sau}$$

$$\left\| J_F(x^{(p)})(x^{(p+1)} - \alpha) \right\|_\infty \le \frac{1}{2} n^2 M_2 \left\| \alpha - x^{(p)} \right\|_\infty^2 \qquad (8)$$

În sfârșit, ținând seama și de ipoteza (ii) avem

$$\left\| (x^{(p+1)} - \alpha) \right\|_\infty = \left\| J_F^{-1}(x^{(p)}) J_F(x^{(p)})(x^{(p+1)} - \alpha) \right\|_\infty \le$$

$$\le \left\| J_F^{-1}(x^{(p)}) \right\| \cdot \left\| J_F(x^{(p)})(x^{(p+1)} - \alpha) \right\|_\infty \le M_1 \frac{1}{2} M_2 n^2 \left\| \alpha - x^{(p)} \right\|_\infty^2$$

Așadar, am demonstrat afirmația a).

Dacă notăm cu $c=\frac{1}{2}n^2M_1M_2$, din a) rezultă

$$\left\|(x^{(p+1)}-\alpha)\right\|_\infty \le c\left\|(x^{(p)}-\alpha)\right\|_\infty^2 \qquad (9)$$

Particularizând indicele p, obținem succesiv

$$\left\|(x^{(1)}-\alpha)\right\|_\infty \le c\left\|(x^{(0)}-\alpha)\right\|_\infty^2$$

$$\left\|(x^{(2)}-\alpha)\right\|_\infty \le c\left\|(x^{(1)}-\alpha)\right\|_\infty^2 \le c^3\left\|(x^{(0)}-\alpha)\right\|_\infty^4$$

....

$$\left\|(x^{(p+1)}-\alpha)\right\|_\infty \le \frac{1}{c}\left(c\left\|(x^{(0)}-\alpha)\right\|_\infty\right)^{2^{p+1}} .$$

Dacă $c\left\|(x^{(0)}-\alpha)\right\|_\infty < 1$, atunci $\lim\limits_{p\to\infty}\left\|(x^{(p+1)}-\alpha)\right\|_\infty = 0$, deci $\left\{ x^{(p)} \right\}$ este convergent şi $\lim\limits_{p\to\infty} x^{(p)} = \alpha$. Cu aceasta teorema este demonstrată. ❑

Exemplu. Reluăm sistemul (4) din §1

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2) \equiv 2x_1^2+x_2^2-5=0 \\ f_2(x_1,x_2) \equiv x_1+2x_2-3=0 \end{cases} .$$

În domeniul $D=[1,2]\times\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ sistemul admite o singură soluție şi anume

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{3} \approx 1.4880338 \\ \alpha_2 = \dfrac{4-\sqrt{3}}{3} \approx 0.7559831 \end{cases}$$

$$x_1^{(0)} = \frac{3}{2} \quad \text{şi} \quad x_2^{(0)} = 1 \ ; \ J_F(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 & 2x_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$J_F(\frac{3}{2},1) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ ; \ J_F^{-1}\left(\frac{3}{2},1\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$f_1\left(\frac{3}{2},1\right) = \frac{1}{2} \ ; \quad f_2\left(\frac{3}{2},1\right) = \frac{1}{2} .$$

Conform (5) avem

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Primele 3 iterații sunt prezentate în tabelul următor

Numărul iterației	0	1	2	3
x_1	1.5	1.5	1.488095	1.488034
x_2	1.0	0.75	0.755952	0.755983

$$J_F^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4x_1 - x_2} & \dfrac{-x_2}{4x_1 - x_2} \\ -\dfrac{1}{2(4x_1 - x_2)} & \dfrac{4x_1}{2(4x_1 - x_2)} \end{pmatrix}$$

$$x_1 \in [1,2] \;\; ; \;\; x_2 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$\left\| J_F^{-1}(x) \right\|_\infty = \max\left\{ \frac{1 + x_2}{4x_1 - x_2}, \frac{1 + 4x_1}{2(4x_1 - x_2)} \right\} \le \frac{9}{5} .$$

Aşadar, putem lua $M_1 = \frac{9}{5}$.

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = 4 \, ; \;\; \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 x_2} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} = 2 \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} = 0$$

şi deci $M_2 = 4$.

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \;\; \alpha \cong \begin{pmatrix} 1{,}488 \\ 0{,}756 \end{pmatrix}, \;\; \left\| x^{(0)} - \alpha \right\|_\infty^2 \approx 0.06 \quad .$$

$$\frac{1}{2} M_1 M_2 n^2 \left\| x^{(0)} - \alpha \right\|_\infty^2 \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{5} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 0.06 = 0.864 < 1$$

Rezultă că algoritmul Newton –Raphson este convergent în acest caz.

Observația 1. *Metoda Newton expusă aici are un inconvenient major şi anume faptul că la fiecare pas trebuie calculată inversa* $J_F^{-1}(x^{(p)})$. *Din motive de continuitate, putem presupune că într-o vecinătate suficient de mică a punctului* $x^{(0)}$ *avem* $J_F^{-1}(x^{(p)}) \cong J_F^{-1}(x^{(0)})$. *Se obține astfel metoda Newton modificată*

$$\begin{cases} v^{(p+1)} & = v^{(p)} - J_F^{-1}(x^{(0)}) \, F(v^{(p)}) \quad , \quad p \ge 0 \\ v^{(0)} & = x^{(0)} \end{cases} \tag{10}$$

Observăm că $v^{(1)} = x^{(1)}$ *dar, în general* $v^{(p)} \neq x^{(p)}$ *pentru* $p > 1$.

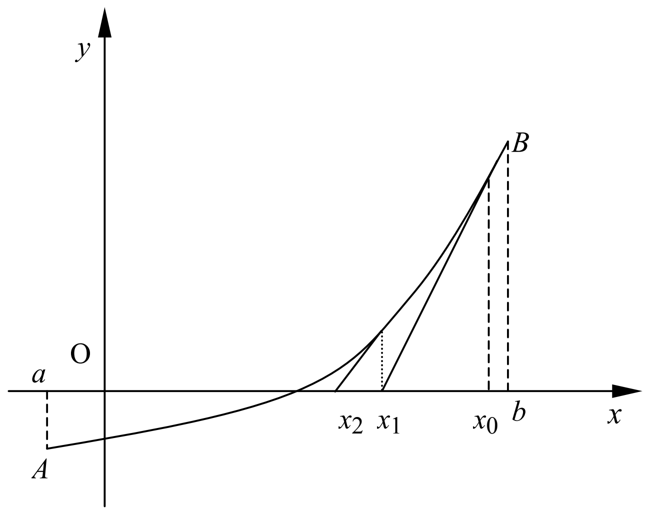
L. Kantorovici a studiat metoda Newton modificată şi a dat condiții suficiente care asigură convergența algoritmului (10).

În continuare să analizăm metoda Newton–Raphson pentru o singură ecuație neliniară.

$F(x)=0$, $x\in[a,b]$. (11)

Presupunem că ecuația (11) admite o singură rădăcină $\alpha\in[a,b]$. Algoritmul (5) revine la

$$\begin{cases} x_{p+1}=x_p-\dfrac{f(x_p)}{f'(x_p)} , \quad p\geq 0 \\ x_0\in[a,b] \end{cases} \qquad (12)$$



Din punct de vedere geometric, x_{p+1} reprezintă abscisa punctului în care tangenta la graficul funcției f în punctul $M_p[x_p, f(x_p)]$ întâlnește axa Ox.
Într-adevăr, ecuația tangentei la grafic în punctul $M_0[x_0, f(x_0)]$ este

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \quad .$$

Fie x_1 abscisa punctului în care această tangentă întâlnește axa Ox.

Avem

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$$

şi mai departe

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

adică prima iterație din (12).

Fie $m_1=\inf\{\,|f'(x)|\ ;\ x\in[a,b]\}$. Atunci putem lua $M_1=\dfrac{1}{m_1}$. Evident $m_2=\sup\{\,|f''(x)|\ ;\ x\in[a,b]\}$. Algoritmul este convergent dacă

$$\frac{1}{2}M_1M_2|x_0-\alpha|^2<1 \ .$$

Exemplul 2. Fie ecuația $F(x) \equiv x^3 - 2x - 5 = 0$; $x \in [2,3]$. Ecuația admite o singură rădăcină reală $\alpha \in (2,3)$.

$$F(2) = -1 < 0 \; ; \; F(3) = 16 > 0 \, .$$

Algoritmul este

$$\begin{cases} x_{p+1} = x_p - \dfrac{x_p^3 - 2x_p - 5}{3x_p^2 - 2} \; , \; p \geq 0 \\ x_0 \in (2,3) \;\; \text{arbitrar} \end{cases} \tag{13}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \; ; \quad M_1 = \frac{1}{10} \; ; \; f''(x) = 6x \; ; \quad M_2 = 18$$

$$\frac{1}{2} M_1 M_2 |x_0 - \alpha|^2 < \frac{9}{10} < 1 \; ,$$

de unde rezultă convergența șirului $\{x_p\}$ definit de (13). Valorile obținute dupa primele 5 iterații sunt trecute în tabelul de mai jos.

Numărul iterației	0	1	2	3	4	5
x	2.5	2.16418	2.09714	2.09456	2.09455	2.09455

Exerciții

1. Să se găsească soluția aproximativă a sistemului

$$\begin{cases} y^3 - 20x - 1 & = 0 \\ x^3 + xy - 10y + 10 & = 0 \end{cases}$$

situată în dreptunghiul D =[-1, 1]×[0, 2], folosind metoda aproximațiilor succesive.

R. Considerăm $G : D \to D$ unde $G(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y^3 - 1}{20} \\ \\ \dfrac{x^3 + xy + 10}{10} \end{pmatrix}$

$M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2} = \left(\sup\limits_{x \in D} \left| \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| \right)_{1 \leq i,j \leq 2} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{10} \end{pmatrix}$, iar $\|M\|_\infty = \dfrac{3}{5}$, deci G

este o contracție și șirul aproximațiilor succesive $x^{(p+1)} = G(x^{(p)})$ converge la soluția sistemului.
Valorile obținute după primele 3 iterații sunt trecute în tabelul de mai jos.

Numărul iterației	0	1	2	3
x	0.5	-0.0437	0.00583	-0.000679
y	0.5	1.0375	0.99545	0.99993

2. Să se găsească soluția aproximativă a sistemului

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0 \end{cases}$$

situată în dreptunghiul $D = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right] \times \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$, folosind metoda aproximațiilor succesive.

R. Punem sistemul sub forma $\begin{cases} x = \dfrac{x^3 + y^3}{6} + \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{x^3 - y^3}{6} + \dfrac{1}{3} \end{cases}$ și atunci

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{6} + \dfrac{1}{2} \\ g_2(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{6} + \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$ este o contracție a lui D. Într-adevăr,

$$M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le 2} = \left(\sup_{x \in D} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| \right)_{1 \le i,j \le 2} = \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \\ \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$ iar

$\|M\|_\infty = 0.47222$, deci G este o contracție și șirul aproximațiilor succesive $x^{(p+1)} = G(x^{(p)})$ converge la soluția sistemului. Considerând $x_0=0.5$ și $y_0=0.5$ avem:

Numărul iterației	0	1	2	3
x	0.5	0.54167	0.53266	0.53256
y	0.5	0.33333	0.35365	0.35115

3. Să se găsească soluția aproximativă a ecuației $e^{-x}+10x-5=0$ situată în intervalul $[0, 1]$, folosind metoda aproximațiilor succesive.

R. Ecuația se poate pune sub forma $x = \dfrac{5 - e^{-x}}{10} = \varphi(x)$, unde $\varphi(x)$ este o contracție și șirul aproximațiilor succesive $x = \varphi(x)$ converge la soluția ecuației. Valorile obținute după primele 5 iterații sunt trecute în tabelul de mai jos.

Nr. de iterații	0	1	2	3	4	5
x	0	0.4	0.43297	0.43514	0.43528	0.43529

$$\left|x_5 - x^*\right| \le \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}} \left|x_1 - x_0\right| = 0.00525 \ .$$

4. Să se găsească soluția aproximativă din cadranul întâi pentru sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 & = 0 \\ 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 & = 0 \end{cases}$$

folosind metoda Newton.

R. Șirul aproximațiilor succesive $x^{(p+1)} = x^{(p)} - J_F^{-1}(x^{(p)}) F(x^{(p)})$, $p \ge 0$

unde:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 \\ 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J_F(x^{(p)}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \ .$$

Se obțin:

$$J^{-1}(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -0.19112 & 0.25482 \\ -0.31853 & 0.09137 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.59209 \\ 2.32015 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} -0.12916 & 0.16685 \\ -0.25343 & 0.049 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3.49059 \\ 2.26341 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} -0.13672 & 0.1773 \\ -0.26238 & 0.05379 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.48745 \\ 2.26163 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} -0.13697 & 0.17765 \\ -0.26267 & 0.05395 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 3.48744 \\ 2.26163 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x^{(4)}) = \begin{pmatrix} -0.13697 & 0.17765 \\ -0.26267 & 0.05395 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(5)} = \begin{pmatrix} 3.48744 \\ 2.26163 \end{pmatrix} \quad \text{ş. a. m. d.}$$

5. Să se găsească soluția aproximativă ($x>0$, $y>0$) pentru sistemul

$$\begin{cases} x^2 - y & = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x & = 0 \end{cases}$$

folosind metoda Newton.

R. Şirul aproximaţiilor $x^{(p+1)} = x^{(p)} - J_F^{-1}(x^{(p)})F(x^{(p)})$, $p \geq 0$ unde:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ x^2 + y^2 - 3x \end{pmatrix} \quad , \quad J_F(x^{(p)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} .$$

Se obţin următoarele rezultate dacă se porneşte cu $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$J^{-1}(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.66667 & 0.33333 \\ 0.33333 & 0.66667 \end{pmatrix} , \; x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.33333 \\ 1.66667 \end{pmatrix} ;$$

$$J^{-1}(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0.38961 & 0.11688 \\ 0.03896 & 0.31169 \end{pmatrix} , \; x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.22511 \\ 1.48918 \end{pmatrix} ;$$

$$J^{-1}(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0.44138 & 0.1482 \\ 0.08148 & 0.36311 \end{pmatrix} , \; x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.21353 \\ 1.47253 \end{pmatrix} ;$$

$$J^{-1}(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0.44792 & 0.15209 \\ 0.08714 & 0.36914 \end{pmatrix} , \; x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.21341 \\ 1.47237 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x^{(4)}) = \begin{pmatrix} 0.44799 & 0.15213 \\ 0.0872 & 0.3692 \end{pmatrix} , \; x^{(5)} = \begin{pmatrix} 1.21341 \\ 1.47237 \end{pmatrix} .$$

6. Folosind metoda Newton să se aproximeze soluţia pozitivă a sistemului de ecuaţii neliniare

$$\begin{cases} x^2 & + y^2 & + z^2 & = 1 \\ 2x^2 & + y^2 & - 4z & = 0 \\ 3x^2 & - 4y & + z^2 & = 0 \end{cases} , \text{ considerând } X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} .$$

R. Şirul aproximaţiilor $x^{(p+1)} = x^{(p)} - J_F^{-1}(x^{(p)})F(x^{(p)})$, $p \geq 0$, unde :

$$F(X) = \begin{pmatrix} x^2 & + y^2 & + z^2 & -1 \\ 2x^2 & + y^2 & - 4z & \\ 3x^2 & - 4y & + z^2 & \end{pmatrix} ; \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ;$$

$$J_F(X)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}.$$

Se obțin următoarele rezultate dacă se porneşte cu $X^{(0)}=\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$:

$$J_F^{-1}(X^{(0)})=\begin{pmatrix} 0.375 & 0.125 & 0.125 \\ 0.35 & 0.05 & -0.15 \\ 0.275 & -0.175 & 0.025 \end{pmatrix} \; ; \; X^{(1)}=\begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{pmatrix}$$

$$J_F^{-1}(X^{(1)})=\begin{pmatrix} 0.23552 & 0.05792 & 0.07336 \\ 0.36486 & 0.04054 & -0.14865 \\ 0.2973 & -0.18919 & 0.02703 \end{pmatrix} \; ; \; X^{(2)}=\begin{pmatrix} 0.78982 \\ 0.49662 \\ 0.36993 \end{pmatrix}$$

$$J_F^{-1}(X^{(2)})=\begin{pmatrix} 0.26276 & 0.06359 & 0.08104 \\ 0.36652 & 0.04023 & -0.149 \\ 0.29855 & -0.18978 & 0.02701 \end{pmatrix} \; ; \; X^{(3)}=\begin{pmatrix} 0.78521 \\ 0.49661 \\ 0.36992 \end{pmatrix}$$

7. Să se găsească soluția aproximativă ($x>0$, $y>0$) pentru sistemul

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

folosind metoda Newton modificată.

R. Şirul aproximațiilor succesive $x^{(p+1)} = -J_F^{-1}(x^{(0)})F(x^{(p)})$, $p \ge 0$

unde:

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} x^2 - y \\ x^2 + y^2 - 3x \end{pmatrix} \quad , \quad J_F(x^{(p)})=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Se obțin următoarele rezultate dacă se porneşte cu $x^{(0)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$J^{-1}(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.66667 & 0.33333 \\ 0.33333 & 0.66667 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.23077 \\ 1.46154 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.20791 \\ 1.46908 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.21586 \\ 1.47494 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.21217 \\ 1.47093 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$x^{(47)} = \begin{pmatrix} 1.21341 \\ 1.47237 \end{pmatrix}.$$