DOUĂ DEMONSTRAŢII ALE TEOREMEI DE REPREZENTARE A LUI STONE

Andra Jugănaru

I. Introducere

Scopul acestei lucrări este de a prezenta două demonstraţii ale teoremei următoare: *orice algebră Boole este izomorfă cu o algebră Boole ale cărei elemente sunt părţi ale unei mulţimi*. Acest rezultat, obţinut de Marshall H. Stone, în anul 1936, a fost considerat decisiv pentru dezvoltarea matematicii secolului trecut.

Teorema a putut fi enunţată abia după ce, la sfârşitul secolului al XIX-lea, cercetările privind teoria grupurilor au evoluat, în condiţiile unui interes crescut al matematicienilor pentru abstractizarea algebrei. Probabil că teorema de reprezentare a lui Cayley, publicată în 1878, care arăta că orice grup abstract este abstract izomorf cu un grup „concret" de substituţii (permutări), a fost premisa de la care a pornit şi Stone.

Dar teoriei grupurilor, cea mai veche ramură a algebrei abstracte, i-a urmat firesc, teoria algebrelor booleene.

Teorema de reprezentare a lui Cayley a reuşit să stabilească axiomele teoriei grupurilor abstracte, demonstrând că ele erau suficiente pentru a enunţa proprietăţile „algebrei substituţiilor". În algebrele booleene, era într-adevăr necesară o teoremă de reprezentare care să arate că axiomele înglobează „algebra claselor". Dar aşa cum nici în teoria grupurilor proprietăţile referitoare la permutări nu se puteau aplica tuturor grupurilor, nici în algebrele booleene nu putea apărea un rezultat care să demonstreze că orice algebră Boole este izomorfă cu *toate* submulţimile unei mulţimi. Clasa algebrelor Boole cu această proprietate este caracterizată de următoarea teoremă: *o algebră Boole este izomorfă cu algebra tuturor submulţimilor unei mulţimi dacă şi numai dacă este completă şi atomică*.

Prin demonstrarea ei, logicienii A. Lindenbaum şi A. Tarski, i-au creat lui Stone o premisă importantă în descoperirea teoremei sale de reprezentare. Ei nu s-au referit însă la algebrele Boole neatomice, structuri pe care Stone le-a aprofundat. (Johnstone, 1982: vii-xvi)

În algebră, teorema de reprezentare a lui Stone conceptualizează reprezentarea structurilor prin obiecte mai simple. Ea este un caz particular al reprezentării algebrelor universale ca produs subdirect al unor obiecte dintr-o clasă fixată, rezultat cunoscut ca teorema lui Birkhoff: *orice algebră dintr-o clasă ecuaţională este izomorfă cu un produs subdirect de algebre subdirect ireductibile*. Eficienţa aplicării acestei teoreme depinde însă de cunoaşterea structurii algebrelor subdirect ireductibile. Cum în cazul algebrelor Boole, unicul obiect subdirect ireductibil este $L_2 = \{0, 1\}$, se poate enunţa cu uşurinţă teorema lui Stone. Astfel se reduce verificarea identităţilor dintr-o algebră Boole oarecare la calculul în cea mai simplă algebră Boole: L_2.

În logică, s-a demonstrat legătura puternică dintre teorema de completitudine tare a calculului propoziţional şi teorema de reprezentare a lui Stone, fiecare dintre aceste rezultate conducând la o demonstraţie a celuilalt. De aici poate fi extrasă ideea studierii relaţiei dintre completitudine şi reprezentare pentru orice sistem logic. (Georgescu C, 2008: 6)

Din momentul publicării ei, s-au propus numeroase demonstraţii ale teoremei lui Stone. Cele două prezentate în continuare sunt, în opinia noastră, reprezentative pentru două domenii importante ale matematicii, care astfel se întrepătrund: algebra şi logica. Aşadar, pentru demonstrația algebrică, vom folosi teoria ultrafiltrelor în algebrele Boole, iar pentru demonstrația metamatematică, vom aplica un alt rezultat important din logică: teorema de completitudine a calculului propozițional.

II. Preliminarii

Pentru început, vom continua enunțarea câtorva definiții şi rezultate preliminarii.

Fie B o algebră Boole.

Se numeşte *filtru* o mulțime nevidă $F \subseteq B$ pentru care:

i) pentru orice $x, y \in F$ *,* $x \wedge y \in F$ *;*

ii) dacă $x \leq y$ *şi* $x \in F$ *atunci* $y \in F$.

Dacă $F \neq B$, F se numeşte *filtru propriu***.** Un filtru F este propriu dacă şi numai dacă $0 \notin F$.

F se numeşte *filtru prim* dacă $x \vee y \in F$ implică $x \in F$ sau $y \in F$.

Un filtru maximal propriu al lui B se numeşte *ultrafiltru*.

Dacă X este o submulțime a lui B, atunci *filtrul generat de* X este intersecția tuturor filtrelor ce includ pe X. Cu alte cuvinte, filtrul generat de X este cel mai mic filtru (în sensul incluziunii) ce include pe X. Vom nota cu $[X)$ filtrul generat de X (Georgescu A: 11).

Mulțimea filtrelor proprii ale lui B este ordonată în raport cu incluziunea. Un ultrafiltru este un element maximal al acestei mulțimi. Cu alte cuvinte, un filtru propriu U este ultrafiltru dacă şi numai dacă pentru orice filtru propriu F, din $U \subseteq F$ rezultă $U = F$.

În cazul algebrelor Boole infinite, demonstrarea existenței ultrafiltrelor impune invocarea axiomei lui Zorn: *Orice mulțime inductiv ordonată admite cel puțin un element maximal*.

Următorul rezultat poartă numele de teorema de existență a ultrafiltrelor:

<u>Teorema de existență a ultrafiltrelor</u>

Pentru orice filtru propriu F *există un ultrafiltru* U *astfel încât* $F \subseteq U$.

Demonstrație

Fie Σ mulțimea filtrelor proprii ale lui B ce includ pe F. Evident, $F \in \Sigma$. Vom arăta că $(\Sigma, \subseteq)$ este inductiv ordonată. Fie $(F_i)_{i \in I}$ o familie total ordonată de filtre din Σ. Pentru orice $i, j \in I$, $F_i \subseteq F_j$ sau $F_j \subseteq F_i$. Notăm $G = \bigcup_{i \in I} F_i$. Vom demonstra că G este un filtru propriu. Dacă $x, y \in G$ atunci există $i, j \in I$ astfel încât $x \in F_i$ şi $y \in F_j$. Putem presupune, de exemplu, că $F_i \subseteq F_j$. Atunci, $x, y \in F_j$, deci $x \wedge y \in F_j \subseteq G$. A doua proprietate din definiția filtrului se verifică imediat. Atunci G este un majorant al familiei $(F_i)_{i \in I}$ şi $(\Sigma, \subseteq)$ este inductivă. Aplicând axioma lui Zorn, rezultă existența unui ultrafiltru U ce include pe F .

Următorul rezultat poartă numele de teorema de caracterizare a ultrafiltrelor:

<u>Teorema de caracterizare a ultrafiltrelor</u>
Dacă F este un filtru propriu al lui B, atunci sunt echivalente următoarele afirmații:
i) F este ultrafiltru;
ii) F este filtru prim;
iii) pentru orice $x \in B$, $x \in F$ sau $\bar{x} \in F$.
Demonstrație

$i \Rightarrow ii$: Presupunem prin absurd că F nu este prim, deci există $x, y \in B$ astfel încât $x \vee y \in F$, dar $x, y \notin F$. Atunci incluziunile stricte $F \underset{\neq}{\subset} [F \cup \{x\})$ și $F \underset{\neq}{\subset} [F \cup \{y\})$ arată că filtrele $[F \cup \{x\})$ și $[F \cup \{y\})$ nu sunt proprii, deci conțin pe 0. Din $0 \in [F \cup \{x\})$ rezultă existența unui element $a \in F$ astfel încât $a \wedge x = 0$. Analog, există $b \in F$ astfel încât $b \wedge y = 0$. Atunci $0 = (a \wedge x) \vee (b \wedge y) = (a \vee b) \wedge (a \vee y) \wedge (x \vee b) \wedge (x \vee y)$. Cum $a \vee b, a \vee y, x \vee b \in F$ (din $a, b \in F$) și $x \vee y \in F$ (din ipoteză), rezultă că $0 \in F$. Contradicție, deci F este prim.

$ii \Rightarrow iii$: $x \vee \bar{x} = 1 \in F$.

$iii \Rightarrow i$: Presupunem prin absurd că există un filtru propriu G astfel încât $F \underset{\neq}{\subset} G$. Atunci există $x \in G$ și $x \notin F$. Folosind ipoteza, $\bar{x} \in F \subset G$, deci $0 = x \wedge \bar{x} \in G$. Contradicție, deci F este ultrafiltru.

Pentru teorema de reprezentare a lui Stone există două forme:
Teorema I. Pentru orice algebră Boole B există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : B \to \mathrm{P}(X)$.

Teorema II. Pentru orice algebră Boole B există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : B \to L_2^X$.

<u>Observații:</u>
1. Prima formă a teoremei reduce calculul boolean într-o algebră Boole oarecare la calcul cu mulțimi.
2. A doua formă a teoremei reduce calculul boolean într-o algebră Boole oarecare întâi la calcul în L_2^X, iar apoi calculul în L_2^X se reduce la calcul în L_2 (operațiile se fac pe componente).

III. Demonstrația algebrică a teoremei lui Stone

În această secțiune vom prezenta o demonstrație a teoremei de reprezentare a lui Stone pe baza proprietăților ultrafiltrelor într-o algebră Boole.

Vom nota cu X mulțimea ultrafiltrelor lui B și cu $d : B \to \mathrm{P}(X)$ funcția definită prin $d(x) = \{U \in X \,\vdots\, x \in U\}$, pentru orice $x \in B$. Pentru orice $x, y \in B$ și pentru orice ultrafiltru U avem echivalențele:

$U \in d(x \vee y) \Leftrightarrow x \vee y \in U$
$\Leftrightarrow x \in U$ sau $y \in U$ (U este prim)
$\Leftrightarrow U \in d(x)$ sau $U \in d(y)$

$$\Leftrightarrow \ U \in d(x) \cup d(y).$$

$$\begin{aligned} U \in d(x \wedge y) &\Leftrightarrow \ x \wedge y \in U \\ &\Leftrightarrow \ x \in U \text{ şi } y \in U \qquad (U \text{ este filtru}) \\ &\Leftrightarrow \ U \in d(x) \text{ şi } U \in d(y) \\ &\Leftrightarrow \ U \in d(x) \cap d(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \in d(\bar{x}) &\Leftrightarrow \ \bar{x} \in U \\ &\Leftrightarrow \ x \notin U \qquad \text{(din teorema de caracterizare a ultrafiltrelor, } iii)) \\ &\Leftrightarrow \ U \notin d(x) \\ &\Leftrightarrow \ U \in C_{d(x)} \end{aligned}$$

Am demonstrat că $d(x \vee y) = d(x) \cup d(y)$, $d(x \wedge y) = d(x) \cap d(y)$, $d(\bar{x}) = C_{d(x)}$, ceea ce arată că d este morfism boolean. Dacă $x \neq 0$ atunci există un ultrafiltru U astfel încât $x \in U$, deci $U \in d(x)$ şi $d(x) \neq Ø$. Am arătat că $d(x) = Ø$ implică $x = 0$, deci $d^{-1}(Ø) = \{0\}$. Deci d este injectivă.

IV. Sistemul formal al calculului propoziţional

Sistemul formal al calculului propoziţional este descris prin trei componente: sintaxa, semantica şi algebra Lindenbaum-Tarski.

Sintaxa calculului propoziţional

Alfabetul sistemului formal al calculului propoziţional este format din următoarele simboluri:

1. variabile propoziţionale, notate $u, v, w \ldots$, eventual cu indici;

2. simboluri logice (conectori): $\neg$ (simbolul de negaţie) şi $\rightarrow$ (simbolul de implicaţie).

3. parantezele: $(,)$ $[,]$.

Se va presupune că mulţimea V a variabilelor propoziţionale este infinită.

Pornind de la aceste simboluri primitive, vom construi cuvintele (asamblajele). Prin definiţie, un cuvânt este un şir finit de simboluri primitive, scrise unul după altul.

Se numeşte enunţ orice cuvânt φ ce verifică una dintre condiţiile următoare:

i) φ este o variabilă propoziţională;

ii) există un enunţ ψ astfel încât $\varphi = \neg\psi$;

iii) există enunţurile ψ, θ astfel încât $\varphi = \psi \rightarrow \theta$.

Variabilele propoziţionale se vor numi enunţuri atomice (elementare). Vom nota cu E mulţimea enunţurilor. Pentru $\varphi, \psi \in E$ introducem abrevierile:

$\varphi \vee \psi = \neg\varphi \rightarrow \psi$ (disjuncţia)

$\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (conjuncţia)

$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ (echivalenţa).

În dezvoltarea sintaxei calculului propoziţional vom urmări stabilirea unei noţiuni care să reprezinte adevărurile formale ale sistemului şi a unei noţiuni care să spună ce este inferenţa sintactică.

O axiomă a sistemului formal al calculului propoziţional este un enunţ care are una din formele următoare:

A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
A3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
unde φ, ψ, χ sunt enunțuri arbitrare.

O teoremă formală este un enunț φ ce verifică una dintre condițiile următoare:

T1) φ este o axiomă

T2) există un enunț ψ astfel încât ψ şi $\psi \to \varphi$ sunt teoreme ($\frac{\psi, \psi \to \varphi}{\varphi}$ se numeşte deducție modus ponens).

Vom nota cu T mulțimea teoremelor, iar faptul că φ este o teoremă prin $\vdash \varphi$.

O demonstrație formală a unui enunț φ este un şir finit de enunțuri $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ astfel încât $\psi_n = \varphi$ şi pentru orice $1 \le i \le n$ se verifică una dintre condițiile următoare:

1) ψ_i este o axiomă;

2) există doi indici, $k, j < i$ astfel încât $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$.

Fie Γ o mulțime de enunțuri, şi φ un enunț. Vom spune că enunțul φ este dedus din ipotezele Γ dacă una dintre condițiile următoare este verificată:

D1) φ este axiomă;

D2) $\varphi \in \Gamma$;

D3) există un enunț ψ astfel încât ψ şi $\psi \to \varphi$ sunt deduse din ipotezele Γ (modus ponens).

O Γ-demonstrație formală a lui φ este un şir de enunțuri $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ astfel încât $\psi_n = \varphi$ şi pentru orice $1 \le i \le n$ se verifică una dintre condițiile următoare:

1) ψ_i este o axiomă;

2) $\psi_i \in \Gamma$;

3) există doi indici, $k, j < i$ astfel încât $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$. (Georgescu B: 1-4)

Semantica sistemului formal *L*

Până acum am dezvoltat sistemul *L* la nivel formal, fără a atribui enunțurilor valori de adevăr. Acest lucru va fi realizat în paragraful de față prin noțiunea de interpretare.

O *interpretare* a lui *L* este o funcție oarecare $h : V \to L_2$.

Propoziția 1

Pentru orice interpretare $h : V \to L_2$ *există o funcție unică* $\tilde{h} : E \to L_2$ *care satisface proprietățile următoare:*

a) $\tilde{h}(u) = h(u)$ *pentru orice* $u \in V$ *;*

b) $\tilde{h}(\neg\varphi) = \neg\tilde{h}(\varphi)$ *pentru orice* $\varphi \in E$ *;*

c) $\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)$ *pentru orice* $\varphi, \psi \in E$.

Demonstrație

Definiția lui $\tilde{h}$ se face prin inducție, urmărind cazurile *a)-c)*. Demonstrarea unicității lui $\tilde{h}$ se face tot prin inducție. Fie $g : E \to L_2$ astfel încât:

a') $g(u) = h(u)$ pentru orice $u \in V$;

b') $g(\neg\varphi) = \neg g(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$ *;*

c') $g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Vom arăta că pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = g(\alpha)$. Distingem trei cazuri pentru α :

- $\alpha \in V$: $g(\alpha) = h(\alpha) = \tilde{h}(\alpha)$;
- $\alpha = \neg\varphi$: $g(\alpha) = \neg g(\varphi) = \neg\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\alpha)$ pentru că $g(\varphi) = \tilde{h}(\varphi)$ (ipoteza de inducție);
- $\alpha = \varphi \to \psi$: $g(\alpha) = g(\varphi) \to g(\psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\alpha)$ pentru că $g(\varphi) = \tilde{h}(\varphi)$ și $g(\psi) = \tilde{h}(\psi)$ (ipoteza de inducție).

<u>Consecințe imediate.</u> Pentru orice $\varphi, \psi \in E$ avem:

d) $\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$;

e) $\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$;

f) $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$.

<u>Observație:</u>

Dacă $h : V \to L_2$ este o interpretare, atunci există un unic morfism boolean $\tilde{h} : E \to L_2$ care face comutativă următoarea diagramă:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/\sim \arrow[dl, "\bar{h}"] \\
& L_2 &
\end{tikzcd}$$

$\bar{h}$ este definit de $\bar{h}\left(\hat{\varphi}\right) = \tilde{h}(\varphi)$.

Enunțul φ este adevărat în interpretarea $h : V \to L_2$ dacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$. φ este fals în interpretarea $h : V \to L_2$ dacă $\tilde{h}(\varphi) = 0$. Un enunț φ este universal adevărat ($\models \varphi$) dacă este adevărat în orice interpretare.

Observație

Interpretarea unui enunț este valoarea 0 sau 1 obținută atunci când tuturor variabilelor propoziționale ce intră în componența sa le atribuim valori din L_2. Un enunț universal adevărat va avea valoarea 1 pentru orice valori din L_2 luate de variabilele propoziționale ce apar în φ. (Bell, Machover, 1997: 157-159)

Propoziția 2

Pentru orice enuț φ, $\vdash \varphi$ implică $\models \varphi$.

Corolar 3

Pentru orice enunț φ nu putem avea $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg \varphi$.

Propoziție 4

Pentru orice enunț φ avem $\vdash \varphi \Leftrightarrow \models \varphi$.

Algebra Lindenbaum-Tarski

Algebra Lindenbaum-Tarski este o algebră Boole asociată canonic sistemului formal L. Proprietățile sintactice ale lui L se vor reflecta în proprietăți booleene, realizându-se trecerea de la sintaxă la algebră.

Lema 1.

Pentru orice enunțuri φ, ψ avem $\vdash \varphi$ și $\vdash \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \wedge \psi$

Se definește relația binară ~ pe mulțimea E a enunțurilor lui L:

$$\varphi \sim \psi \overset{def}{\Leftrightarrow} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

Lema 2

~ este o relație de echivalență pe E.

Lema 3

$\leq$ este o relație de ordine pe $E/_{\sim}$.

Lema 4

$\left(E/_{\sim}, \leq\right)$ *este o latice distributivă în care* $\inf\left(\hat{\varphi}, \hat{\psi}\right) = \widehat{\varphi \wedge \psi}$ *și* $\sup\left(\hat{\varphi}, \hat{\psi}\right) = \widehat{\varphi \vee \psi}$.

Lema 5

$E/_{\sim}$ este o algebră Boole.

Algebra Boole $\left(E/_{\sim}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\right)$ poartă numele de algebra Lindenbaum-Tarski, asociată sistemului formal L.

Observație:

Dacă notăm $p: E \to E/_{\sim}$ surjecția canonică ($p(\varphi) = \hat{\varphi}$ pentru orice $\varphi \in E$) atunci pentru orice $\varphi, \psi \in E$ sunt verificate condițiile următoare:

a) $p(\varphi \vee \psi) = p(\varphi) \vee p(\psi)$;

b) $p(\varphi \wedge \psi) = p(\varphi) \wedge p(\psi)$;

c) $p(\neg\varphi) = \neg p(\varphi)$;

d) $p(\varphi \to \psi) = p(\varphi) \to p(\psi)$;

e) $p(\varphi \leftrightarrow \psi) = p(\varphi) \leftrightarrow p(\psi)$.

Egalitățile *a), b)* sunt chiar definițiile operațiilor din $E/_{\sim}$, *d)* revine la a arăta că $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \to \neg\psi)$, iar *e)* rezultă din *b)* și *d)*. Cele cinci egalități de mai sus arată modul în care conectorii sunt convertiți în operații booleene.

Lema 6

Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi$ *dacă și numai dacă* $\hat{\varphi} = 1$.

Demonstrație.

Trebuie să demonstrăm $\vdash \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Presupunem $\vdash \varphi$. Cum $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi \to \varphi)$ (conform *A1*), rezultă $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \to \varphi$. Totdeauna are loc $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi)$, deci $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Reciproc, presupunem că $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Dar $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ (principiul terțului exclus), deci prin *modus ponens* $\vdash \varphi$.

Observație

Lema 6 oferă o metodă algebrică pentru verificarea dacă un enunț este teoremă formală.

Fie Σ o mulțime de enunțuri ale lui *L.* Se definește următoarea relație binară pe *E*: $\varphi \sim_{\Sigma} \psi \iff \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \iff \Sigma \vdash \varphi \to \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$.

Procedând analog ca mai sus, se poate arăta că $\sim_{\Sigma}$ este o relație de echivalență pe E și că $E/_{\sim}$ are o structură canonică de algebră Boole, numită algebra Lindenbaum-Tarski a lui Σ.

Notăm $\varphi/_{\Sigma}$ clasa de echivalență a lui $\varphi \in E$. Atunci:

$\varphi/_{\Sigma} \vee \psi/_{\Sigma} = (\varphi \vee \psi)/_{\Sigma}$;

$\varphi/_{\Sigma} \wedge \psi/_{\Sigma} = (\varphi \wedge \psi)/_{\Sigma}$;

$\neg\left(\varphi/_{\Sigma}\right) = \neg\varphi/_{\Sigma}$;

$\varphi/_{\Sigma} \le \psi/_{\Sigma} \iff \Sigma \vdash \varphi \to \psi$;

$\varphi/_{\Sigma} = 1 \iff \Sigma \vdash \varphi$.

Pentru $\Sigma = \emptyset$ obținem algebra Lindenbaum-Tarski $E/_{\sim}$. (Georgescu B: 8-9)

Observație

Demonstrația algebrică a teoremelor de completitudine utilizează teorema de reprezentare a lui Stone aplicată algebrei Lindenbaum-Tarski.

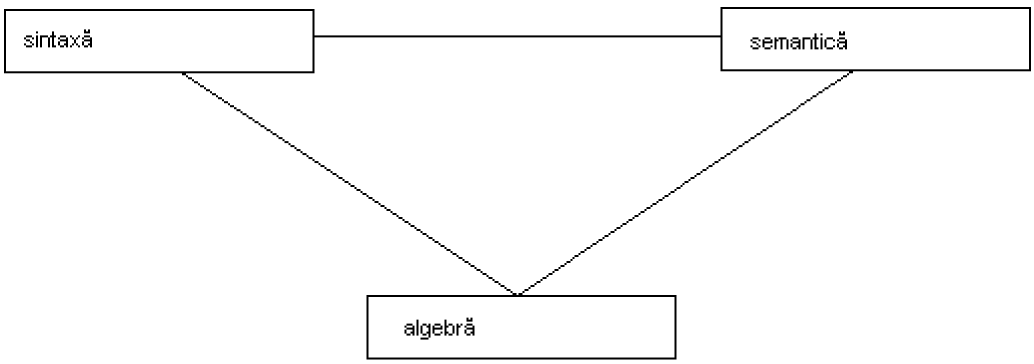
V. Teorema de completitudine

Teorema de completitudine are astfel două forme:

1. $\vdash \varphi$ *dacă şi numai dacă* $\models \varphi$
2. $\Gamma \vdash \varphi$ *dacă şi numai dacă* $\Gamma \models \varphi$

Teorema de completitudine răspunde unor probleme naturale. Pe de o parte, avem enunțurile demonstrabile sintactic (teoremele formale), iar pe de altă parte avem enunțurile universal adevărate. Firesc, se pune problema comparării acestor figuri de enunțuri, ceea ce se realizează prin teorema de completitudine, care stabileşte echivalența lor. De asemenea, teorema de completitudine ne oferă un procedeu comod de verificare a faptului că un enunț este o teoremă formală (procedeu ce poate fi programat).

Demonstrația prezentată mai sus este de natură algebrică. Ideea fundamentală o reprezintă trecerea la algebra Lindenbaum-Tarski şi invocarea teoremei lui Stone pentru găsirea interpretării necesare în demonstrație. Această trecere prin algebră aruncă o lumină mai completă asupra relației dintre sintaxă şi semantică, relație care are de fapt şi un substrat algebric. Pe scurt, sistemul formal L a fost analizat din perspectiva triunghiului:



VI. Demonstrația metamatematică a teoremei lui Stone

În această secțiune este prezentată, în trei etape, o demonstrație a teoremei de reprezentare a lui Stone pe baza teoremei de completitudine extinsă.

a) Fie sistemul formal al calculului propozițional L în care $V = B$, E este mulțimea enunțurilor, $E/_{\sim}$ este algebra Lindenbaum-Tarski, $p : E \rightarrow E/_{\sim}$ este surjecția canonică. Vrem să arătăm că există un morfism boolean surjectiv $f : E/_{\sim} \to B$ astfel încât următoarea diagramă să fie comutativă:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "p/B"] \arrow[dr, "1_B"'] & & E/\sim \arrow[dl, "f"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Pentru orice interpretare $h : B \to B$ există şi este unică o funcţie $\tilde{h} : E \to B$ astfel încât:

a) $\tilde{h}(x) = x$ pentru orice $x \in B$;

b) $\tilde{h}(\neg\varphi) = \neg\tilde{h}(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$;

c) $\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Demonstraţie

Definiţia lui $\tilde{h}$ se face prin inducţie, urmărind clauzele *a)-c)*. Demonstraţia unicităţii lui $\tilde{h}$ se face tot prin inducţie. Fie $g : E \to B$ astfe încât:

a') $g(x) = h(x)$ pentru orice $x \in B$;

b') $g(\neg\varphi) = \overline{g(\varphi)}$ pentru orice $\varphi \in E$;

c') $g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Vom arăta că pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = g(\alpha)$. Distingem trei cazuri:

-$\alpha \in B$: $g(\alpha) = h(\alpha) = \tilde{h}(\alpha)$;

-$\alpha = \neg\varphi$: $g(\alpha) = \neg g(\varphi) = \neg\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\alpha)$ pentru că $g(\varphi) = \tilde{h}(\varphi)$ (ipoteza de inducţie);

-$\alpha = \varphi \to \psi$: $g(\alpha) = g(\varphi) \to g(\psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\alpha)$ pentru că $g(\varphi) = \tilde{h}(\varphi)$ şi $g(\psi) = \tilde{h}(\psi)$ (ipoteza de inducţie).

<u>Consecinţe imediate</u>. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$:

d) $\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$;

e) $\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$;

f) $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$.

<u>Observație</u>

Dacă $h : B \to B$ este o interpretare, atunci există şi este unic un morfism boolean $f : E/_{\sim} \to B$, definit prin $f\left(\hat{\varphi}\right) = \tilde{h}(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$, astfel încât următoarea diagramă să fie comutativă:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "p / B"] \arrow[dr, "1_B"'] & & E/\sim \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Atunci $F = f^{-1}(1) = \left\{\hat{\varphi} \mid f\left(\hat{\varphi}\right) = 1\right\}$ este un filtru propriu în $E/_{\sim}$ şi avem un izomorfism boolean $\lambda : \left(E/_{\sim}\right)/_{\mathrm{F}} \to B$, $\lambda\left(\hat{\varphi}/_{F}\right) = f\left(\hat{\varphi}\right)$, pentru orice $\varphi \in E$.

b) Fie F un filtru propriu în $E/_{\sim}$ (eventual cel de la punctul *a)*) şi $\Delta = p^{-1}(F)$. Δ este un sistem deductiv consistent în B şi pentru orice $\varphi, \psi \in E$ au loc echivalențele: $\hat{\varphi}/_{F} = \hat{\psi}/_{F} \Leftrightarrow \hat{\varphi} \leftrightarrow \hat{\psi} \in F \Leftrightarrow \widehat{\varphi \leftrightarrow \psi} \in F \Leftrightarrow \varphi \leftrightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow \Delta \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \varphi/_{\Delta} = \psi/_{\Delta}$, unde $\varphi/_{\Delta}$ este clasa de echivalență a lui φ în raport cu $\sim_{\Delta}$. Dacă $E/_{\Delta} = E/_{\sim_{\Delta}}$ este algebra Lindenbaum-Traski asociată lui Δ, atunci echivalențele spun că funcția $\Phi : \left(E/_{\sim}\right)/_{\mathrm{F}} \to E/_{\Delta}$ definită prin $\Phi\left(\hat{\varphi}/_{F}\right) = \varphi/_{\Delta}$ pentru orice $\varphi \in E$ este un izomorfism boolean.

c) Presupunem că Δ este o mulțime consistentă (eventual cea de la *b)*) şi X este mulțimea modelelor lui Δ. $X = \{h : V \to L_2 \mid h \models \Delta\}$.

Din teorema de completitudine rezultă $X \neq \emptyset$. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$ avem echivalențele: $\varphi/\Delta = \psi/\Delta \Leftrightarrow \Delta \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \Delta \models \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ pentru orice $h \in X$ $\Leftrightarrow \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ pentru orice $h \in X$ $\Leftrightarrow \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi)$ pentru orice $h \in X$.

Definim funcția $\lambda : E/\Delta \to L_2^X$ prin $\lambda\left(\varphi/\Delta\right)(h) = \tilde{h}(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$ şi pentru orice $h \in X$. Echivalențele arată că λ este bine definită şi injectivă, deci λ este morfism boolean injectiv.

Prin urmare, combinând punctele *a)*, *b)*, *c)* din demonstrație, putem considera compunerea următoarelor funcții: $B \xrightarrow{\sim} \left(E/\sim\right)/\mathrm{F} \xrightarrow{\Phi} E/\Delta \xrightarrow{\lambda} L_2^X$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\sim"] \arrow[rrr, bend right, "d"'] & (B/\sim)_{/F} \arrow[r, "\Phi"] & E/\Delta \arrow[r, "\lambda"] & L_2^X
\end{tikzcd}$$

Se poate observa că funcția $d : B \to L_2^X$ este un morfism boolean injectiv.

VII. Concluzii

Teorema de reprezentare a lui Stone este unul dintre cele mai importante rezultate recente din teoria algebrelor booleene. Prin ea, calculul într-o algebră Boole oarecare se reduce la calculul în algebra Boole standard $L_2 = \{0, 1\}$.

În această lucrare au fost prezentate două demonstrații ale teoremei lui Stone:

- prima, de natură algebrică[1], se bazează pe proprietățile ultrafiltrelor într-o algebră Boole;
- a doua, de natură metamatematică[2], foloseşte ca instrument teorema de completitudine extinsă.

În fapt, teorema de reprezentare a lui Stone este varianta algebrică a teoremei de completitudine. Mai mult, demonstrațiile celor enunțuri sunt dovada echivalenței lor matematice. Parcurgându-le, observăm că fiecare dintre ele poate fi demonstrat pe baza celuilalt. Iar într-o teorie a mulțimilor din care axioma alegerii este exclusă (Năstăsescu, 1974: 86-88), teorema de reprezentare a lui Stone şi teorema de completitudine sunt enunțuri logic echivalente.

[1] V. supra, p. 3.
[2] V. supra, p. 9.

Bibliografie

Bell, Machover, 1997 - John Bell, Moshé Machover, *A Course in Mathematical Logic*, Amsterdam-New York-Oxford, Ed. North Holland Publishing Company, 1997, 599 p.

Georgescu A – George Georgescu, *Curs de logică matematică şi computaţională, anul I, semestrul I*, capitolul *Algebre Boole*, netipărit, 135 p.

Georgescu B – George Georgescu, *Curs de logică matematică şi computaţională, anul I, semestrul I*, capitolul *Sistemul formal al calculului propoziţional*, netipărit, 135 p.

Georgescu C – George Georgescu, *Matematica teoremelor de completitudine*, în „Revista de filosofie”, Tomul LV, Nr. 1-2, 2008, p. 71-85.

Johnstone 1982 – Peter T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge-London-New York-New Rochelle-Melbourne-Sidney, Ed. Cabridge University Press, 1982, 370 (-391) p.

Năstăsescu 1974 – Constantin Năstăsescu, *Introducere în teoria mulţimilor*, Bucureşti, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1974, 153 (-155) p.

ANEXE

În această secțiune am inclus demonstrația teoremei de completitudine extinsă, bazându-ne pe proprietățile calculului propozițional prezentate în partea a patra a lucrării.[3]

<u>Propoziție 1</u>
Pentru orice enunț φ, $\vdash\varphi$ *implică* $\models\varphi$.

Demonstrație:

Vom arăta că dacă $\vdash\varphi$, atunci $\tilde{h}(\varphi)=1$ pentru orice interpretare $h:V\to L_2$. Se procedează prin inducție asupra modului cum s-a definit $\vdash\varphi$. Considerăm întâi cazul axiomelor:

A1) φ este de forma $\alpha\to(\beta\to\alpha)$.

$\tilde{h}(\varphi)=\tilde{h}(a)\to\left(\tilde{h}(\beta)\to\tilde{h}(\alpha)\right)=\neg\tilde{h}(\alpha)\vee\neg\tilde{h}(\beta)\vee\tilde{h}(\alpha)=1$.

A2) φ este de forma $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$.

Dacă notăm $x=\tilde{h}(\alpha)$, $y=\tilde{h}(\beta)$, $z=\tilde{h}(\gamma)$ atunci $\tilde{h}(\varphi)=(x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z))=1$ după cum arată o simplă verificare în L_2.

A3) φ este de forma $(\neg\alpha\to\neg\beta)\to(\beta\to\alpha)$

Este suficient să probăm $(\bar{x}\to\bar{y})\to(y\to x)=1$ în L_2.

Presupunem acum că $\vdash\varphi$ a fost obținut prin modus ponens din $\vdash\psi$, $\vdash\psi\to\varphi$. Ipoteza inducției se reduce la $\tilde{h}(\psi)=1$ şi la $\tilde{h}(\psi\to\varphi)=1$. Atunci: $1=\tilde{h}(\psi)\to\tilde{h}(\varphi)=1\to\tilde{h}(\varphi)=\tilde{h}(\varphi)$ și demonstrația s-a încheiat.

<u>Corolar 1</u>
Pentru orice enunț φ *nu putem avea* $\vdash\varphi$ *și* $\vdash\neg\varphi$.
Demonstrație
Dacă există un enunț φ astfel încât $\vdash\varphi$ şi $\vdash\neg\varphi$ atunci pentru orice interpretare *h* am avea $\tilde{h}(\varphi)=1$ şi $\tilde{h}(\neg\varphi)=1$. Contradicție.

<u>Propoziție 2</u>
Pentru orice enunț φ *avem* $\vdash\varphi\ \Leftrightarrow\ \models\varphi$.
Demonstrație
$(\Rightarrow)$ din *Propoziția 2*
$(\Leftarrow)$ Presupunem că φ nu este teoremă formală. Trecând la algebra Lindenbaum-Tarski $E/_{\sim}$ şi aplicând *lema 6*[4], enunțată în partea a patra a lucrării, rezultă $\hat{\varphi}\neq 1$. Aplicăm teorema de reprezentare a lui Stone pentru algebra Boole $E/_{\sim}$. Atunci există o mulțime

[3] V. supra, p. 4.
[4] V. supra, p. 8.

nevidă X şi un morfism boolean injectiv $d : E/_{\sim} \to L_2^X$. Din injectivitatea lui d, rezultă $d\left(\hat{\varphi}\right) \neq 1$ în L_2^X. Deci există $x \in X$ astfel încât $d\left(\hat{\varphi}\right)(x) \neq 1$ în L_2.

Considerăm proiecţia $\Pi_x : L_2^X \to L_2$ definită prin $\Pi_x(f) = f(x)$ pentru orice $f \in L_2^X$. Π_x este morfism boolean. Să luăm interpretarea $h : V \to L_2$ dată de compunerea următoarelor morfisme booleene: $V \subseteq E \xrightarrow{p} E/_{\sim} \xrightarrow{d} L_2^X \xrightarrow{\Pi_x} L_2$. Vom stabili că: $\tilde{h}(\alpha) = d\left(\hat{\alpha}\right)(x)$. Demonstrăm prin inducţie asupra enunţului α.

a) $\alpha \in V$

$\tilde{h}(\alpha) = h(\alpha) = \Pi_x(d(p(\alpha))) = d\left(\hat{\alpha}\right)(x)$.

b) $\alpha = \neg\beta$ şi ipoteza de inducţie funcţionează pentru β, deci $\tilde{h}(\beta) = d\left(\hat{\beta}\right)(x)$.

Atunci $\tilde{h}(\alpha) = \neg\tilde{h}(\beta) = d\left(\hat{\beta}\right)(x) = \left(\neg d\left(\hat{\beta}\right)\right)(x) = d\left(\neg\hat{\beta}\right)(x) = d\left(\widehat{\neg\beta}\right)(x) = d\left(\hat{\alpha}\right)(x)$.

c) $\alpha = \beta \to \gamma$ şi ipoteza de inducţie funcţionează pentru β şi γ, deci $\tilde{h}(\beta) = d\left(\hat{\beta}\right)(x)$ şi $\tilde{h}(\gamma) = d\left(\hat{\gamma}\right)(x)$.

Atunci:

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\alpha) &= \tilde{h}(\beta) \to \tilde{h}(\gamma) = d\left(\hat{\beta}\right)(x) \to d\left(\hat{\gamma}\right)(x) = \left(d\left(\hat{\beta}\right) \to d\left(\hat{\gamma}\right)\right)(x) = \\ d\left(\hat{\beta} \to \hat{\gamma}\right)(x) &= d\left(\widehat{\beta \to \gamma}\right)(x) = d\left(\hat{\alpha}\right)(x)\end{aligned}$$

Proprietatea a fost demonstrată. Aplicând-o pentru $\alpha = \varphi$ rezultă $\tilde{h}(\varphi) = d\left(\hat{\varphi}\right)(x) \neq 1$, deci φ nu este tautologie.