Infimumul şi supremumul unei mulţimi (I)

Marina Constantinescu
Mircea Constantinescu

Un concept fundamental în analiza matematică este cel de margine (inferioară şi superioară) a unei mulţimi de numere reale. Vom vedea că acesta stă la baza unor rezultate teoretice şi serveşte în abordarea unor categorii de aplicaţii. Vom începe cu unele noţiuni introductive.

Definiţia 1. O mulţime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte minorată sau mărginită inferior dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \le a, \forall a \in A.$ În acest caz numărul m se numeşte minorant al mulţimii $A.$

Definiţia 2. O mulţime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte majorată sau mărginită superior dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \le M, \forall a \in A.$ În acest caz numărul M se numeşte majorant al mulţimii $A.$

Definiţia 3. O mulţime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte mărginită dacă este mărginită inferior şi superior, adică dacă există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \le a \le M, \forall a \in A.$

Definiţia 4. O mulţime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte nemărginită inferior (superior) dacă nu are niciun minorant (majorant).

Exemple.

1. Mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale este mărginită inferior (0 este un minorant al acesteia) şi nemărginită superior.
2. Mulţimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sunt nemărginite inferior şi superior.
3. Mulţimea $A = (0,1]$ este mărginită inferior (0 este un minorant) şi superior (1 este un majorant).

Definiţia 5. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă. Un număr real m se numeşte margine inferioară (sau infimum) a mulţimii A dacă este cel mai mare minorant al mulţimii $A.$ Marginea inferioară a unei mulţimi, dacă există, este unică şi se notează $\inf(A).$

Exemplu. Dacă $A = (0,1]$ atunci $\inf(A)$=0.

Definiţia 5. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă. Un număr real M se numeşte margine superioară (sau supremum) a mulţimii A dacă este cel mai mic majorant al mulţimii $A.$ Marginea superioară a unei mulţimi, dacă există, este unică şi se notează $\sup(A).$

Exemplu. Dacă $A = (0,1]$ atunci $\sup(A)$=1.

Vom accepta următoarea axiomă, specifică mulţimii numerelor reale.

Axioma lui Cantor. Orice mulţime nevidă de numere reale mărginită inferior admite margine inferioară.

Observaţie. Afirmaţia anterioară nu este valabilă de exemplu pe mulţimea numerelor raţionale. De exemplu, mulţimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} / x^2 < 3 \right\}$ este mărginită superior în $\mathbb{Q}$ (2 este majorant în $\mathbb{Q}$ al mulţimii), dar nu există $\sup(A)$ în $\mathbb{Q}.$ Această axiomă permite să afirmăm că orice mulţime nevidă mărginită de numere reale are atât margine inferioară cât şi margine superioară. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime nemărginită inferior, atunci ea nu admite niciun minorant. În acest caz vom considera că $\inf(A) = -\infty.$ Analog, dacă mulţimea $A \subset \mathbb{R}$ este nemărginită superior, vom considera $\sup(A) = \infty.$ Vom nota $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$ Cu acestea axioma lui Cantor se extinde în $\overline{\mathbb{R}}$ după cum urmează:

Orice mulţime nevidă de numere reale admite în $\overline{\mathbb{R}}$ margine inferioară şi margine superioară.

Exemple. Avem $\inf(\mathbb{N}) = 0,$ $\sup(\mathbb{N})$ nu există în $\mathbb{R},$ dar $\sup(\mathbb{N}) = \infty$ în $\overline{\mathbb{R}}.$ De asemenea $\inf(\mathbb{Z})$ şi $\sup(\mathbb{Z})$ nu există în $\mathbb{R},$ dar $\inf(\mathbb{Z}) = -\infty,$ $\sup(\mathbb{Z}) = \infty$ în $\overline{\mathbb{R}}.$

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime nevidă şi $\inf(A) \in A,$ atunci $\inf(A) = \min(A),$ unde $\min(A)$ este cel mai mic element al lui $A.$ Analog, dacă $\sup(A) \in A,$ atunci $\sup(A) = \max(A),$ unde $\max(A)$ este cel mai mare element al lui $A.$

Vom prezenta în continuare unele caracterizări pentru infimumul şi supremumul unei mulţimi de numere reale, utile în aplicaţii, şi unele rezultate teoretice de bază care derivă din Axioma lui Cantor.

Propoziţia 1. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $m \in \mathbb{R}.$ Atunci $m = \inf(A)$ dacă şi numai dacă au loc simultan:

a) $m \le x, \forall x \in A;$

b) $\forall \varepsilon > 0,$ există $x \in A$ astfel încât $x < m + \varepsilon.$

Demonstraţie. Dacă $m = \inf(A)$, atunci m este minorant al lui $A,$ deci are loc a). Fie $\varepsilon > 0.$ Cum m este cel mai mare minorant al lui A, rezultă că $m + \varepsilon$ nu este minorant al lui $A,$ deci există $x \in A$ astfel încât $x < m + \varepsilon$, ceea ce probează b). Reciproc, din a) rezultă că m este minorant al lui $A.$ Presupunem că m nu este cel mai mare minorant al lui A şi fie $m_0 = \inf(A),$ deci $m < m_0.$ Alegând $\varepsilon = m_0 - m > 0,$ conform b), există $x \in A$ astfel încât $x < m + (m_0 - m) = m_0,$ ceea ce contrazice faptul că m_0 este minorant al lui $A.$ Deci $m = \inf(A)$.

Observaţie. Analog se demonstrează că dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime nevidă şi dacă $M \in \mathbb{R},$ atunci $M = \sup(A)$ dacă şi numai dacă au loc simultan:

a) $x \le M, \forall x \in A;$

b) $\forall \varepsilon > 0,$ există $x \in A$ astfel încât $x > M - \varepsilon.$

Propoziţia 2. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $\alpha = \inf(A) \in \overline{\mathbb{R}}.$ Dacă $\alpha \notin A$, atunci există un şir $(x_n)_n$ de numere din A astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha.$

Demonstraţie. Să presupunem pentru început că $\alpha \in \mathbb{R}.$ Conform Propoziţiei 1, pentru $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ există $x_n \in A$ astfel încât $x_n < \alpha + \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Atunci $\alpha \le x_n < \alpha + \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha.$ Dacă $\inf(A) = -\infty,$ atunci pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*,$ există $x_n \in A$ astfel încât $x_n \le -n$ (deoarece $-n$ nu este minorant al lui A) şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty.$

Teorema 3 (Weierstrass). Orice şir de numere reale monoton şi mărginit este convergent.

Demonstraţie. Să presupunem că $(x_n)_n$ este un şir de numere reale crescător şi mărginit superior. Atunci mulţimea $A = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ fiind mărginită superior admite supremum, conform Axiomei lui Cantor, şi fie $l = \sup(A) \in \mathbb{R}.$ Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l.$ Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Conform observaţiei de la Propoziţia 1, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_{n_\varepsilon} > l - \varepsilon.$ Cum $(x_n)_n$ este un şir crescător, rezultă că $l - \varepsilon < x_n \le l, \forall n \ge n_\varepsilon,$ ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l.$ Analog se demonstrează că dacă $(x_n)_n$ este un şir de numere reale descrescător şi mărginit inferior, atunci $(x_n)_n$ este convergent.

Lema 4 (Cesaro). Dacă $(a_n)_n$ este un şir mărginit de numere reale, atunci el conţine un subşir convergent.

Demonstraţie. Fie mulţimea $A = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}.$ Cum A este nevidă şi mărginită, conform Axiomei lui Cantor, există $\inf(A) \in \mathbb{R}.$ Dacă $\inf(A) \notin A$, conform Propoziţiei 2, rezultă că există un subşir $(a_{k_n})_n$ al lui $(a_n)_n$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \inf(A)$, ceea ce probează lema. Dacă $\inf(A) \in A$, fie $b_1 = \inf(A)$ şi $A_1 = A \setminus \{b_1\}.$ Inductiv, definim $A_n = A_{n-1} \setminus \{b_n\}, n \in \mathbb{N}^*,$ unde $A_0 = A$ şi $b_k = \inf(A_{k-1}), k \in \mathbb{N}, k \ge 2.$ Această construcţie se opreşte dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\inf(A_{n_0}) \notin A_{n_0}$, caz în care există un subşir $(a_{k_n})_n$ al lui $(a_n)_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \inf(A_{n_0}),$ deci

$(a_n)_n$ conţine un subşir convergent. Dacă însă $\inf(A_n) \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci şirul $(b_n)_n$ astfel construit este un subşir crescător şi mărginit al şirului $(a_n)_n$,deci, conform Teoremei 3, $(b_n)_n$ este convergent.

Propoziţia 5. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie monotonă pe intervalul I, atunci limitele laterale ale funcţiei f în orice punct din interiorul lui I există şi sunt finite.

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că f este crescătoare, şi fie x_0 un punct din interiorul lui I. Vom arăta că $f(x_0 - 0)$ există şi este finită, celălalt caz fiind analog. Fie mulţimea $A = \{f(x) / x < x_0\}$. Atunci $f(x) \le f(x_0), \forall x \in A$, deci A este mărginită superior, deci există $\sup(A) = \alpha \in \mathbb{R}$. Vom arăta că $f(x_0 - 0) = \alpha$, folosind criteriul cu vecinătăţi. Într-adevăr, fie $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ o vecinătate arbitrară a lui $\alpha (\varepsilon > 0)$. Atunci există $x_\varepsilon < x_0$ astfel încât $f(x_\varepsilon) \in (\alpha - \varepsilon, \alpha]$ (în caz contrar ar rezulta că $f(x) \le \alpha - \varepsilon, \forall x < x_0$, deci α nu ar fi cel mai mic majorant al mulţimii A). Cum f este crescătoare rezultă că $f(x) \in (\alpha - \varepsilon, \alpha], \forall x \in (x_\varepsilon, x_0)$, ceea ce arată că există $f(x_0 - 0)$ şi $f(x_0 - 0) = \alpha$.

Propoziţia 6. Fie $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă. Atunci există $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Demonstraţie. Putem presupune că f este crescătoare , celălalt caz fiind analog. Fie mulţimea $A = \{f(x) / x \in (a, +\infty)\}$. Dacă mulţimea A este nemărginită superior, atunci pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $x_\varepsilon \in (a, +\infty)$ astfel încât $f(x_\varepsilon) > \varepsilon$. Cum f este crescătoare, rezultă că $f(x) > \varepsilon, \forall x \ge x_\varepsilon$, deci $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Dacă însă A este mărginită superior, fie $\alpha = \sup(A)$. Cu un argument asemănător celui din Propoziţia 5, se obţine că $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \alpha$.

Lema 7. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = 0$.

Demonstraţie. Să presupunem de exemplu că $f(a) < 0$ şi $f(b) > 0$. Fie atunci mulţimea $A = \{x \in [a, b] / f(x) < 0\}$. Cum A este nevidă ($a \in A$) şi mărginită rezultă că există $\sup(A) =: c \in [a, b]$. Dacă $f(c) < 0$, cum f este continuă, rezultă că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $[c, c + \varepsilon] \subset [a, b]$ şi $f(x) < 0, \forall x \in [c, c + \varepsilon]$, şi atunci $c + \varepsilon$ este element al lui A, deci c nu este majorant al lui A, fals. Dacă $f(c) > 0$, atunci de asemenea din continuitatea lui f rezultă că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $[c - \varepsilon, c] \subset [a, b]$ şi $f(x) > 0, \forall x \in [c - \varepsilon, c]$, deci $c - \varepsilon$ este majorant al lui A, ceea ce contrazice faptul că $\sup(A) = c$. Din cele de mai sus rezultă că $f(c) = 0$, ceea ce încheie demonstraţia.

Teorema 8. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile, adică există $u, v \in [a, b]$ şi $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m = f(u) \le f(x) \le f(v) = M, \forall x \in [a, b]$.

Demonstraţie. Considerăm mulţimea $A = \{f(x) / x \in [a, b]\}$. Atunci există $\inf(A)$ şi $\sup(A)$ în $\overline{\mathbb{R}}$. Vom arăta că $\sup(A) \in A$. Să presupunem că $\sup(A) \notin A$. Atunci , conform Propoziţiei 2, există un şir $(x_n)_n$ de elemente din $[a, b]$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \sup(A)$. Cum $(x_n)_n$ este mărginit, conform Lemei 4, acesta conţine un subşir $(x_{k_n})_n$ convergent la un element $\alpha \in [a, b]$. Funcţia f fiind continuă în α, se obţine că $f(\alpha) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_{k_n}) = \sup(A)$, deci $\sup(A) \in A$, contradicţie. Aşadar $\sup(A) \in A$, şi, analog $\inf(A) \in A$. Aşadar există $u, v \in [a, b]$ astfel încât $f(u) = \inf(A)$ şi $f(v) = \sup(A)$. Luând $m = f(u)$ şi $M = f(v)$, demonstraţia se încheie.

Bibliografie

1. M. Burtea, G. Burtea, Manual de Matematică M1, clasa a XI-a, Editura Carminis, Piteşti, 2004.
2. C. Mortici, 600 de probleme, Editura Gil, Zalău, 2001.
3. M. Megan, A. Sasu, B. Sasu, Calcul diferenţial în $\mathbb{R}$, Editura Universităţii de Vest, Timişoara, 2001.
4. Colecţia Gazeta Matematică.

profesoară Şc. Gen. C. Săvoiu, Tg-Jiu **profesor C.N.E.T., Tg-Jiu**

Integrarea produsului

Prof. Emil Pătrăşcoiu,C.N.E.T.

O problemă importantă în calculul integral este integrarea produsului a două funcţii. Dacă produsul are o formă particulară se cunosc metodele de integrare (cea mai importantă, integrarea prin părţi).

Nota de faţă prezintă câteva elemente în acest sens.

Propoziţia 1. Dacă f e integrabilă pe $[a,b]$ atunci f^2 este integrabilă pe $[a,b]$.

Demonstrație: f integrabilă pe $A \Rightarrow f$ mărginită pe $A \Rightarrow \exists\, m_A(|f|), M > 0$ astfel încât $|f(x)| \le M$, $\forall x \in A$.

f mărginită $\Rightarrow |f|$ mărginită. Fie $A \subset [a,b]$, $A \ne \varnothing$ şi $m_A(|f|), M_A(|f|)$ marginile lui $|f|$ pe $A \Rightarrow m_A(|f|) \le |f(x)| \le M(|f|)$. **(1)**

$f(x) \ge 0, \forall x \Rightarrow 0 \le m_A(|f|)$.

Din (1) $\Rightarrow m_A^2(|f|) \le |f(x)|^2 \le M_A^2(|f|)$ **(2)**

$|f(x)|^2 = f^2(x) \Rightarrow m_A^2(|f|) \le f^2(x) \le M_A^2(|f|)$ **(3)**

Fie $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a,b] \subset f$, $\forall [x_{i-1}, x_i] \subset [a,b]$ $m_i^2(|f|) \le m_i(f^2) \le M_i(f^2) \le M_i^2(|f|), \forall i \in \{1,2,3\ldots,n\} \Rightarrow M_i(f^2) - m_i(f^2) \le$ $M_i^2(|f|) - m_i^2(|f|)$ $= (M_i(|f|) + m_i(|f|))(M_i(|f|) - m_i(|f|)) \le 2M[M_i(|f|) - m_i(|f|)]$ **(4)**

Din **(4)** $\Rightarrow S_\Delta(f^2) - s_\Delta(f^2) \le 2M[S_\Delta(|f|) - s_\Delta(|f|)]$ **(5)**.

$|f|$ integrabilă pe $[a,b]$, conform teoremei lui Darboux $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall \Delta$ diviziune a lui $[a,b], \|\Delta\| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow S_\Delta(|f|) - s_\Delta(|f|) < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

Din **(5)** $\Rightarrow S_\Delta(f^2) - s_\Delta(f^2) < \varepsilon \Rightarrow f^2$ integrabilă pe $[a,b]$.

Propoziţia 2. Dacă f, g sunt integrabile pe $[a,b]$ atunci $f \cdot g$ e integrabilă pe $[a,b]$

Demonstrație: $f \circ g = \dfrac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{2}$ iar cu Propoziţia 1 şi alte proprietăţi cunoscute din manuale $\Rightarrow$ c.c.t.d.

Observaţie: Reciproca propoziţiei 2 e falsă: $\exists$ funcţii f, g neintegrabile ca $f \cdot g$ să fie integrabilă: $f = g =$ funcţie a lui Dirichlet.

Comentariu: În general , $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \ne \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$. Din această cauză , pe această idee, există o mare varietate de rezultate din care prezentăm în continuare câteva.

Problema1. Fie $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \ne \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx$, pentru orice $g:[0,1] \to \mathbb{R}$ continuă şi nederivabilă. Să se arate că f este funcţie constanta.

Mihai Piticari

Soluție: f verifică proprietatea din enunţ $\Rightarrow f - c$ verifică aceeaşi proprietate $\forall c \in \mathrm{R}$.

Fie $c=\int_0^1 f(t)dt$ şi $h(x)=f(x)-c$. Relaţia devine $\int_0^1 h(x)g(x)dx=0,\forall g$ ca în enunţ. Demonstrăm că $h(x)$ e funcţia identic nulă: Dacă $\exists x_0\in(0,1), h(x_0)\neq 0,$ luăm $V=[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\subset(0,1)$ pe care h are semn constant (există asemenea vecinătate conform proprietăţii de inerţie a funcţiilor continue); alegem $g(x)=(x-x_0)^2-\varepsilon^2$ pentru $x\in V$, g îndeplineşte condiţiile din enunţ. Înlocuind în relaţia integrală cu $h(x)$, această integrală ar fi un număr nenul, deci relaţia nu e verificată $\Rightarrow h(x)=0\ \forall x\Rightarrow f(x)=c,\forall x.$

Problema 2. $P:[a,b]\to\mathbb{R}$ este funcţie polinomială de grad n. Determinaţi P astfel ca $\int_a^b P(x)\cdot Q(x)dx=0$ oricare ar fi funcţia polinomială Q de grad $n\leq 1$.

Gheorghe Siretchi.

Soluție: $\forall$ P de grad n $\exists R$ funcţie polinomială de grad $2n$ ca $R^{(n)}=P$ şi $R(a)=R^1(a)=\ldots R^{(n-1)}(a)=0.$ Într-adevăr punem $R_1(x)=\int_a^x P(t)dt; R_2(x)=\int_a^x R_1(t)dt,\ldots,\ R_n(x)=\int_a^x R_{n-1}(t)dt\Rightarrow gradR=2n$, $R^{(n)}=P$ şi $R^{(i)}(a)=0\ \ \forall i\in\{0,\ldots,n-1\}$. R e unic determinată prin această condiţie.

Problema revine la determinarea lui R, de gradul $2n$, astfel încât: $R^{(i)}(a)=0$ şi $\int_a^b R^{(n)}(x)Q(x)=0,\forall Q$ funcţie polinomială de grad $\leq n-1$. Efectuând mai multe integrări prin părţi obținem:

$$\int_a^b R^{(n)}(x)Q(x)dx=\left[R^{n-1}(x)\cdot Q(x)-R^{n-2}(x)\cdot Q^1(x)+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot R(x)\cdot Q^{(n-1)}(x)\right]\Big|_a^b+$$
$$(-1)^n\cdot\int_a^b R(x)\cdot Q^{(n)}(x)dx.$$

Cum $Q^{(n)}(x)\equiv 0\Rightarrow 0=R^{(n-1)}(b)Q(b)-R^{(n-2)}(b)Q^1(b)+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot R(b)\cdot Q^{(n-1)}(b)$.

Alegând succesiv $Q(x)$ de forme $1,x,x^2,\ldots,x^{n-1}\Rightarrow R^{(n-1)}(b)=R^{(n-2)}(b)=\ldots=R^1(b)=R(b)=0$, adică a şi b sunt rădăcini multiple de ordin n pentru $R\Rightarrow R(x)=k(x-a)^n(x-b)^n$ iar $P(x)=R^{(n)}(x)$.

Problema 3. Fie $f:[0,\infty]\to[0,\infty]$ continuă, $f(f(x))=x^2,\forall x\in[0,\infty)$. Demonstraţi că $\int_0^1(2x-1)\cdot f(x)dx=1$.

Cristinel Mortici

Soluție: $f(f(x))=x^2\Rightarrow f(f(f(x)))=f(x^2)=f^2(x)$. (1)

f injectivă: $f(x)=f(y)\Rightarrow f(f(x))=f(f(y))\Rightarrow x^2=y^2\Rightarrow x=y$

f continuă şi injectivă $\Rightarrow f$ strict monotonă

$f^2(0)=f(0)\Rightarrow f(0)=0$ sau $f(0)=1$

$f^2(1) = f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ sau $f(1)=1$

Dacă $f(0)=1$ şi $f(1)=0 \Rightarrow f$ descrescătoare $\Rightarrow$ pentru $x>1$ $f(x)<f(1)=0$ imposibil $\Rightarrow f(0)=0$ şi $f(1)=1 \Rightarrow f$ strict crescătoare.

$f(f(x)) = x^2 \Rightarrow f(x) = f^{-1}(x^2) \Rightarrow f^{-1}(x) = f(\sqrt{x})$

Ştim că $\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a) \Rightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(\sqrt{x})dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 2yf(y) = 1 \Rightarrow \int_0^1 (2x+1)f(x)dx = 1$.

Bibliografie

[1]. Colectiv. Olimpiadele şi concursurile de matematică, Editura Bîrchi, Timişoara, 2004
[2]. Gh. Siretchi, Exerciţii avansate de calcul diferenţial şi integral real, Tip. Univ. Bucureşti,1982

Asupra unei probleme propuse la Bacalaureat, 2007

Valeriu V. Bărbieru, profesor, Tg-Jiu
Cornelia Elena Bărbieru, profesor, Tg-Jiu

Acest articol este inspirat de o problemă propusă la Bacalaureat, 2007, M1, mai precis, de Subiectul IV, Varianta 34. Enunţul este următorul (vezi [1]):

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $n \geq 0$.

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

c) Să se arate că $a_{n+1}^2 > a_n^2 + 2$, pentru orice $n \in \mathrm{N}$.

d) Să se arate că

$$\sqrt{2n+1} < a_n < \sqrt{(2n+1) + 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

e) Să se arate că $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0;\infty)$

f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... \frac{1}{a_n}\right) = +\infty$

Propunem următoarea generalizare: se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_n}$, $n \geq 0$ cu $x_0 > 0$, $a;b > 0$.

Evident, pentru $a = b = 1$ şi $x_0 = 1$ se obţine şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ amintit anterior.

De asemenea, pentru $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}p$, cu $p > 0$ se obţine şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{p}{2x_n}$, $x_0 > 0$, cunoscut şi sub denumirea de „*formula lui Heron de calcul a rădăcinii pătrate*".

În [2] se demonstrează că acest şir este descrescător, mărginit (deci convergent) cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{p}$, relaţie care permite calculul rădăcinii pătrate (în mod algoritmic) cu orice marjă de eroare dată.

Acestea fiind spuse, vom începe studiul asupra şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_n}$, $a;b > 0$, $x_0 > 0$ cu câteva consideraţii asupra monotoniei sale.

Dacă definim funcţia $f:(0,\infty) \to R$, $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, $a > 0$, $b > 0$ şi ţinem seama că $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n$, $n \geq 0$, atunci monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ este dată de semnul diferenţei $f(x) - x$, unde $x > 0$.

Din faptul că

$$f(x) - x = ax + \frac{b}{x} - x = \frac{(a-1)x^2 + b}{b}, \; x > 0,$$

rezultă că, pentru $a = 1$, diferenţa este strict pozitivă, iar pentru $a > 0,\ \ a \neq 1,\ f(x) - x$ va avea acelaşi semn cu restricţia la $(0,\infty)$ a funcţiei de gradul al doilea $R \ni x \to (a-1)x^2 + b \in R$.

Cum ecuaţia $(a-1)x^2 + b = 0$; $a > 0$; $a \neq 1$ are o singură rădăcină strict pozitivă $\lambda = \sqrt{\frac{b}{1-a}}$, putem afirma că λ este singurul număr strict pozitiv pentru care $f(\lambda) = \lambda$.

Analiza semnului $f(x) - x$; $x > 0$ este rezumată în tabelul de mai jos.

a	(0, 1)	[1, ∞)
x	(0 λ ∞)	(0 ∞)
$f(x) - x$	+ + + + 0 - - - - -	+ + + + +

Continuăm studiul şirului stabilind condiţii în care are loc monotonia sau convergenţa sa.

Propoziţia 1. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict pozitiv.

Demonstraţie. Deoarece $x_0 > 0$, rezultă că $x_1 = ax_0 + \frac{b}{x_0} > 0$, prin inducţie. $x_n > 0$.

Propoziţia 2. Dacă $a \geq 1$, atunci

şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Demonstraţie. a) Pentru $a \geq 1$, $b > 0$ şi $n \geq 0$ avem

$$x_{n+1} - x_n = (a-1)x_n + \frac{b}{x_n} \geq \frac{b}{x_n} > 0,$$

deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător. (s.c.)

b) Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ fiind s.c. are limită, finită sau infinită.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in R$, atunci $l > 0$, întrucât un şir s.c. şi strict pozitiv are limita strict pozitivă.

Deoarece $x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_n} \geq x_n + \frac{b}{x_n}$, $n \geq 0$, prin trecere la limită se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} \geq \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right)$ sau $l \geq l + \frac{b}{l}$ sau $\frac{b}{l} \leq 0$, în contradicţie cu *b; l >0.*

Presupunerea este falsă, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Studiul monotoniei şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, în cazul $0 < a < 1$, este unul deosebit.

Conform tabelului anterior întocmit, pentru *n* – arbitrar, au loc echivalenţele

$$x_n < x_{n+1} = f(x_n) \Leftrightarrow x_n < \lambda$$

$$x_n > x_{n+1} = f(x_n) \Leftrightarrow x_n > \lambda$$

Astfel, monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ depinde – cel puţin – de poziţia x_n, $n \geq 0$ faţă de λ, aşa că este necesar să stabilim semnul diferenţei dintre un termen oarecare al şirului şi λ. Avem, pentru $n \geq 0$:

$$x_{n+1} - \lambda = f(x_n) - \lambda = ax_n + \frac{b}{x_n} - \lambda = \frac{ax_n^2 - \lambda x_n + b}{x_n}$$

Dacă $\varphi : (0;\infty) \to R$, $\varphi(x) = ax^2 - \lambda x + b$, atunci ecuaţia $\phi(x) = 0$ are discriminantul $\Delta = \lambda^2 - 4ab = \lambda^2(2a-1)^2 \geq 0$ şi rădăcinile $x' = \lambda$, $x'' = \frac{1-a}{a}\lambda$.

Evident, semnul diferenţei $x_{n+1}-\lambda=\frac{\varphi(x_n)}{x_n}$, $n\geq 0$ este dat de semnul funcţiei φ. (restricţie a funcţiei de gradul al doilea la intervalul $(0;\infty)$).
După aceste preliminarii putem trece la stabilirea monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 0}$.
Propoziţia 3. Dacă $0<a<1$ şi există $k\in N$ astfel încât $x_k=x_{k+1}$, atunci $x_n=\lambda$, pentru $n\geq k$.
Demonstraţie. Deoarece λ este singurul număr pozitiv pentru care $f(x)=x$, avem implicaţiile

$$x_k=x_{k+1}\Rightarrow x_k=f(x_k)\Rightarrow x_k=\lambda\Rightarrow x_k=x_{k+1}=\lambda$$

Demonstraţia propriu-zisă se face prin inducţie după $n\geq k$.

$n=k \quad \Rightarrow x_k=\lambda$ (adevărat)

$n=k+1\Rightarrow x_{k+1}=\lambda$ (adevărat)

Presupunem că $x_n=\lambda$, pentru un $n\in N$, $n\geq K$. Atunci

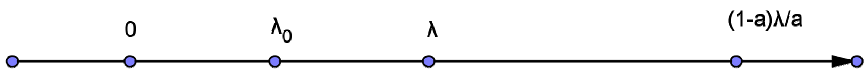
$$x_{n+1}=f(x_n)=f(\lambda)=\lambda \quad \text{sau} \quad x_{n+1}=\lambda.$$

Prin urmare, $x_n=\lambda$ pentru orice $n\geq K$.
Propoziţia 4. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:
dacă $0<a<\frac{1}{2}$, $0<x_0<\lambda$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este monoton.
dacă $\frac{1}{2}<a<1$, $0<x_0<\frac{1-a}{a}\lambda$, atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.
dacă $\frac{1}{2}<a<1$, $\frac{1-a}{a}\lambda<x_0<\lambda$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.
Dacă $a=\frac{1}{2}$, $0<x_0<\lambda$, atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.
Demonstraţie. a) Întrucât $0<a<\frac{1}{2}$, între rădăcinile ecuaţiei $\varphi(x)=0$ are loc ordinea $\lambda<\frac{1-a}{a}\lambda$.
De asemenea, conform observaţiilor făcute după Propoziţia 2 rezultă echivalenţele:

$$x_{n+1}<\lambda\Leftrightarrow\lambda<x_n<\frac{1-a}{a}\lambda$$

$$x_{n+1}>\lambda\Leftrightarrow 0<x_n<\lambda \text{ sau } x_n>\frac{1-a}{a}\lambda,\ n\geq 0.$$

Ţinând seama şi de rezultatele din tabel obţinem



$0<x_0<\lambda\Rightarrow f(x_0)\Rightarrow x_0<x_1$

$0<x_0<\lambda\Rightarrow x_1>\lambda\Rightarrow f(x_1)<x_1\Rightarrow x_2<x_1\Rightarrow x_1>x_2$.

Cele două rezultate referitoare la x_0, x_1, x_2 par a demonstra $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este monoton.
Să presupunem, pentru început, că există $K\in N$ astfel încât $x_k<x_{k+1}<...<x_n<x_{n+1}<...$
Pentru k = 0 obţinem $x_0<x_1<x_2$ - fals, iar pentru K = 1 obţinem $x_1<x_2$ - fals.
Pentru $k\geq 2$ au loc implicaţiile:
$x_k<x_{k+1}\Rightarrow x_k<f(x_k)\Rightarrow x_k<\lambda\Rightarrow x_{k+1}>\lambda\Rightarrow f(x_{k+1})<x_{k+1}\Rightarrow x_{k+2}<x_{k+1}$ - fals, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este strict crescător.
Să presupunem, mai departe, că există $k\in N$ astfel încât
$x_k>x_{k+1}>...>x_n>x_{n+1}...$

Pentru $k = 0$, atunci $x_0 > x_1$ – fals, iar pentru $k \geq 1$ au loc implicaţiile:

$x_{k+2} < x_{k+1} \Rightarrow f(x_{k+1}) < x_{k+1} \Rightarrow x_{k+1} > \lambda \Rightarrow 0 < x_k < \lambda$ sau $x_k > \dfrac{1-a}{a}\lambda$.

Dacă $0 < x_k < \lambda$, atunci $f(x_k) > x_k$, deci $x_{k+1} > x_k$ - fals.

Atunci $x_k > \dfrac{1-a}{a}\lambda$ şi, prin inducţie, $x_n > \dfrac{1-a}{a}\lambda$; $n \geq k$.

Şirul $(x_n)_{n\geq k}$ este strict descrescător (aşa cum am presupus) şi mărginit, întrucât $\dfrac{1-a}{a}\lambda < x_n < x_k$, deci convergent.

Dacă $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, prin trecere la limită în relaţia de recurenţă $x_{n+1} = f(x_n), n \geq 0$, obţinem $f(x) = x$ (f este continuă), deci $x = \lambda$.

Pe de altă parte, trecând la limită în $\dfrac{1-a}{a}\lambda < x_n < x_k$, obţinem $\dfrac{1-a}{a}\lambda \leq \lambda$, în contradicţie cu faptul că $\lambda < \dfrac{1-a}{a}\lambda$, pentru $0 < a < \dfrac{1}{2}$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este strict monoton.

Dacă, totuşi, ar exista $k \in N$ astfel încât $x_k \leq x_{k+1} \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots$, şi am avea un singur egal, de exemplu $x_p = x_{p+1}, p \geq k$, atunci, cf. Propoziţiei 3, vom avea $x_n = \lambda$, pentru orice $n \geq p$, deci şirul devine staţionar.

b), c) Întrucât $\dfrac{1}{2} < a < 1$, între rădăcinile ecuaţiei $\varphi(x) = 0$ are loc ordinea $\dfrac{1-a}{a}\lambda < \lambda$.

Raţionând analog rezultă echivalenţele

$$x_{n+1} < \lambda \Leftrightarrow \frac{1-a}{a}\lambda < x_n < \lambda$$

$$x_{n+1} > \lambda \Leftrightarrow 0 < x_n < \frac{1-a}{a}\lambda \text{ sau } x_n > \lambda; \; n \geq 0.$$

Să observăm că, prin aplicarea inegalităţii A – G, obţinem

$f(x) = ax + \dfrac{b}{x} \geq 2\cdot\sqrt{ax\cdot\dfrac{b}{x}} = 2\sqrt{ab}$ sau $f(x) \geq 2\sqrt{ab}$, cu egalitate numai dacă $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

În acest caz să dovedim că $2\sqrt{ab} > \dfrac{1-a}{a}\lambda$.

Într-adevăr, pentru $\dfrac{1}{2} < a < 1$ şi $b > 0$, avem

$$2\sqrt{ab} > \frac{1-a}{a}\lambda \Leftrightarrow 4ab > \frac{(1-a)^2}{a^2}\cdot\lambda^2 \Leftrightarrow 4ab > \frac{(1-a)^2}{a^2}\cdot\frac{b}{1-a} \Leftrightarrow 4a > \frac{1-a}{a^2} \Leftrightarrow$$

$$4a^3 + a - 1 > 0 \Leftrightarrow (2a-1)(2a^2+a+1) > 0 \Leftrightarrow 2a - 1 > 0, \text{ adevărat.}$$

Atunci

$$x_n = f(x_{n-1}) \geq 2ab > \frac{1-a}{a}\lambda, \quad n \geq 1,$$

deci $\dfrac{1-a}{a}\lambda < x_n < \lambda \Leftrightarrow x_n < \lambda, \quad n \geq 1$.

Deschidem două cazuri.

α) $0 < x_0 < \frac{1-a}{a}\lambda$. Cf. celor stabilite, deducem

$$x_0 < \frac{1-a}{a}\lambda < \lambda \Rightarrow x_0 < \lambda \Rightarrow f(x_0) > x_0 \Rightarrow x_0 < x_1.$$

$$x_0 < \frac{1-a}{a}\lambda \qquad \Rightarrow x_1 > \lambda \Rightarrow f(x_1) < x_1 \Rightarrow x_1 > x_2$$

$$x_1 > \lambda \Rightarrow x_2 > \lambda \Rightarrow f(x_2) < x_2 \Rightarrow x_3 < x_2.$$

Şi, prin inducţie, $x_n > x_{n+1}$, $n \geq 1$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

β) $\frac{1-a}{a}\lambda < x_0 < \lambda$. Avem:

$$x_0 < \lambda \Rightarrow f(x_0) > x_0 \Rightarrow x_0 < x_1$$

$$\frac{1-a}{a}\lambda < x_0 < \lambda \Rightarrow x_1 < \lambda \Rightarrow f(x_1) > x_1 \Rightarrow x_1 < x_2$$

$$x_1 < \lambda \Leftrightarrow \frac{1-a}{a}\lambda < x_1 < \lambda \Rightarrow x_2 < \lambda \Rightarrow f(x_2) > x_2 \Rightarrow x_2 < x_3$$

Şi, prin inducţie, $x_n < x_{n+1}$, $n \geq 0$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

d) Pentru $a = \frac{1}{2}$ avem $\Delta = 0$, $x' = x'' = \lambda$ şi $x_{n+1} - \lambda = \frac{a(x_n - \lambda)^2}{x_n}$; $n \geq 0$

Cum $x_0 \neq \lambda$, va rezulta (inducţie) că $x_n \neq \lambda$, prin urmare

$x_{n+1} > \lambda \Rightarrow f(x_{n+1}) < x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} > x_{n+2} \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

Propoziţia 5. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:

dacă $0 < a < 1$ şi $x_0 = \lambda$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant.

Dacă $0 < a < 1$, $a \neq \frac{1}{2}$ şi $x_0 = \frac{1-a}{a}\lambda$, atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este constant.

Demonstraţie. a) Deoarece λ şi $\frac{1-a}{a}\lambda$ sunt rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$, din relaţia $x_{n+1} - \lambda = \frac{\varphi(x_n)}{x_n}$, $n \geq 0$, pentru $x_0 = \lambda$ se obţine $x_1 = \lambda$ şi $x_n = \lambda$ (inducţie), $n \geq 0$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant.

b) Raţionament analog.

Dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci $\lambda = \frac{1-a}{a}\lambda$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ - constant.

Având drept model demonstraţia de la Propoziţia 4, cititorului nu îi va fi dificil să dovedească:

Propoziţia 6. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:

dacă $0 < a < \frac{1}{2}$, $x_0 > \lambda$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este monoton.

dacă $\frac{1}{2} < a < 1$, $x_0 > \lambda$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător.

dacă $a = \frac{1}{2}$, $x_0 > \lambda$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător.

Următoarele propoziţii se referă la mărginirea şi limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, $0 < a < 1$, $b > 0$.

Propoziţia 7. Dacă $0 < a < 1$, $b > 0$ şi $x_0 > 0$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.

Demonstraţie. Deosebim patru cazuri:

a) Şirul nu este monoton (punctele a) de la Prop. 4) şi 6), echivalent cu $0 < a < \frac{1}{2}$, $b > 0$, $x_0 \neq \lambda$, caz în care $\lambda < \frac{1-a}{a}\lambda$.

Să presupunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este mărginit, deci există $N \in N$ astfel încât $x_n > \frac{1-a}{a}\lambda$, pentru orice $n \geq N$.

Avem, pentru $n \geq N$:

$x_n > \frac{1-a}{a}\lambda \Rightarrow x_{n+1} > \lambda \Rightarrow f(x_{n+1}) < x_{n+1} \Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1}$, în contradicţie cu rezultatul stabilit la punctele anunţate mai sus. Presupunerea este falsă, deci şirul este mărginit superior; cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior de 0, rezultă că $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.

b) Şirul $(x_n)_{n\geq 0;1}$ este strict descrescător.

În acest caz, şirul fiind strict pozitiv este, evident mărginit.

c) Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător, adică $\frac{1}{2} < a < 1$, $\frac{1-a}{a}\lambda < x_0 < \lambda$.

În demonstraţia dată acestui caz $(\mathrm{Pr}op.4;c))$ am arătat că $x_n < \lambda$, $n \geq 0$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.

În cazul şirului constant, acesta este şi mărginit.

Propoziţia 8. Dacă $\frac{1}{2} \leq a < 1$, $b > 0$, $x_0 \geq 0$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda$.

Demonstraţie. Am demonstrat că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit şi, pentru $\frac{1}{2} \leq a < 1$, $b > 0$, $x_0 > \lambda$, monoton sau constant, deci convergent.

Dacă $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ţinând seama că funcţia f este continuă, prin trecere la limită în relaţia de recurenţă $x_{n+1} = f(x_n)$, obţinem $f(x) = x$, deci $x = \lambda$.

În continuare, studiul asupra şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ se va concentra pe cazul $a \geq 1$, $b > 0$ în ideea de a găsi relaţii corespunzătoare punctelor d) şi f) ale subiectului IV din [1].

Propoziţia 9. Dacă $a \geq 1$, atunci şirul $\left(\frac{x_n}{a^n}\right)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

Demonstraţie. Deoarece $x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_n}$, $n \geq 0$, atunci $\frac{x_{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{x_n}{a^n} + \frac{b}{a^{n+1}x_n}$, deci $\frac{x_{n+1}}{a^{n+1}} > \frac{x_n}{a^n}$, adică $\left(\frac{x_n}{a^n}\right)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

Propoziţia 10. Dacă $a > 1$, atunci şirul $\left(\frac{x_n}{a^n}\right)_{n\geq 0}$ este mărginit.

Demonstraţie. Pentru $a > 1$, $b > 0$, $n \geq 0$ avem

$x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_n} > ax_n$ sau $x_{n+1} > ax_n$.

Atunci $x_1 > ax_0$, $x_2 > a^2x_0,..., x_n > a^n x_0$ (inducţie), deci $\frac{x_n}{a^n} \geq x_0$, cu egalitate numai dacă n = 0.

Din egalitatea $x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_n}, n \geq 0$ obţinem

$x_1 = ax_0 + \frac{b}{x_0}$

$$x_2 = ax_1 + \frac{b}{x_1} = a^2 x_0 + \frac{ab}{x_0} + \frac{b}{x_1} = a^2 x_0 + \left(\frac{a}{x_0} + \frac{1}{x_1}\right)b$$

$$x_3 = ax_2 + \frac{b}{x_2} = a^3 x_0 + \frac{a^2 b}{x_0} + \frac{ab}{x_1} + \frac{b}{x_2} = a^3 x_0 + \left(\frac{a^2}{x_0} + \frac{a}{x_1} + 1\right)b$$

Şi, prin inducţie:

$$x_n = a^n x_0 + \left(\frac{a^{n-1}}{x_0} + \frac{a^{n-2}}{x_1} + \ldots + \frac{a}{x_{n-2}} + \frac{1}{x_{n-1}}\right)b, \; n \geq 1$$

Cum $x_n \geq a^n x_0$, avem

$$x_n \leq a^n x_0 + \left(\frac{a^{n-1}}{x_0} + \frac{a^{n-2}}{ax_0} + \frac{a^{n-3}}{a^2 x_0} + \ldots + \frac{a}{a^{n-2} x_0} + \frac{1}{a^{n-1} x_0}\right)b =$$

$$= a^n x_0 + \frac{a^{n-1}}{x_0}\left(1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \ldots + \frac{1}{a^{2n-2}}\right) = a^n x_0 + \frac{a^{n-1}}{x_0} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{a^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{a^2}} =$$

$$= a^n x_0 + \frac{a^{n-1}}{x_0} \cdot \frac{a^2 b}{a^2 - 1} \cdot \left(1 - \frac{1}{a^{2n}}\right) = a^n \cdot \left[x_0 + \frac{ab}{(a^2-1)x_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{a^{2n}}\right)\right] \text{ sau}$$

$$\frac{x_n}{a^n} \leq x_0 + \frac{ab}{(a^2-1)x_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{a^{2n}}\right) < x_0 + \frac{ab}{(a^2-1)x_0}, \quad n \geq 0.$$

Rezultă că şirul $\left(\frac{x_n}{a^n}\right)_{n \geq 0}$ este mărginit, întrucât

$$x_0 \leq \frac{x_n}{a^n} < x_0 + \frac{ab}{(a^2-1)x_0}, \quad n \geq 0$$

Propoziţia 11. Şirul $\left(\frac{x_n}{a^n}\right)_{n \geq 0}$ este convergent.

Demonstraţie. Rezultă din Prop. 9 şi Prop. 10.

Propoziţia 12. Dacă $a = 1$, $b > 0$ şi $y_0 = \frac{x_0^2}{b}$, atunci pentru orice $n \geq 1$ au loc inegalităţile

$$\sqrt{2b + \frac{x_0^2}{n}} < \frac{x_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{2b + \frac{x_0^2}{n} + \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(2k + y_0)^{-1}}{n} \cdot b}$$

Demonstraţie. Dacă $a = 1$ şi $b > 0$, atunci $x_{n+1} = x_n + \frac{b}{x_n}$, $n \geq 0$, deci $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2b + \frac{b^2}{x_n^2}$, de unde obţinem $x_{n+1}^2 > x_n^2 + 2b$, $n \geq 0$.

Avem

$x_1^2 > x_0^2 + 2b$

$x_2^2 > x_1^2 + 2b > x_0^2 + 4b$ sau $x_2^2 > x_0^2 + 4b$ şi, prin inducţie, $x_n^2 \geq x_0^2 + 2nb$, echivalent $x_n \geq \sqrt{x_0^2 + 2nb}$, $n \geq 0$, de unde obţinem

$$\sqrt{2b+\frac{x_n^2}{n}}<\frac{x_n}{\sqrt{n}},\quad n\geq 1.$$

Pe de altă parte

$$x_{n+1}^2=x_n^2+2b+\frac{b^2}{x_n^2}\leq x_n^2+2b+\frac{b^2}{x_0^2+2nb}=x_n^2+2b+\frac{b}{2n+\frac{x_0^2}{b}}, \text{ sau}$$

$$x_{n+1}^2\leq x_n^2+2b+\frac{b}{2n+y_0};\ n\geq 0, \text{ unde } y_0=\frac{x_0^2}{b}, \text{ cu egalitate numai pentru } n=0$$

Atunci

$$x_1^2\leq x_0^2+2b+\frac{b}{y_0}$$

$$x_2^2<x_1^2+2b+\frac{b}{2+y_0}\leq x_0^2+4b+\frac{b}{y_0}+\frac{b}{2+y_0} \quad \text{şi, prin inducţie,}$$

$$x_n^2<x_0^2+2bn+\left(\frac{1}{y_0}+\frac{1}{2+y_0}+\frac{1}{4+y_0}+...+\frac{1}{2(n-1)+y_0}\right)b;\ n\geq 0 \text{ sau}$$

$$x_n<\sqrt{x_0^2+2bn+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+y_0}\right)b},\ n\geq 1, \text{ de unde}$$

$$\frac{x_n}{\sqrt{n}}<\sqrt{\frac{x_0^2}{n}+2b+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(2k+y_0)^{-1}}{n}\cdot b};\ n\geq 1$$

Propoziţia 13. Are loc egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2b}$

Demonstraţie. Şirul $a_n=\frac{1}{y_0}+\frac{1}{2+y_0}+...+\frac{1}{2(n-1)+y_0};\quad n\geq 1$ este, evident, strict crescător, deci are limită, finită sau infinită.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\in R$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$, iar dacă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, aplicăm Stolz – Cesaro.

Într-adevăr, şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n=n$, este strict crescător şi $b_n\to+\infty$.

Atunci

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\frac{1}{2n+y_o}}{1}=\frac{1}{2n+y_0}\to 0,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

Aplicând criteriul cleştelui în dubla inegalitate stabilită în Propoziţia 12, obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2b}.$$

Limita se poate calcula şi direct, fără a ne folosi de dubla inegalitate.

Dacă $c_n=\frac{x_n^2}{n};\ n\geq 1$, atunci sunt îndeplinite condiţiile teoremei Stolz – Cesaro, cazul $\frac{\infty}{\infty}$.

Întrucât $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = +\infty$, iar $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = n$ este strict crescător cu $b_n \to +\infty$.
Atunci

$$\frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{b_{n+1} - b_n} = \frac{2b + \frac{b^2}{x_n^2}}{1} = 2b + \frac{b^2}{x_n^2} \to 2b,$$

de unde obţinem $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{n} = 2b$, deci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2b}$.

Încheiem articolul cu următoarea observaţie. Propoziţia 8 demonstrează convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ în cazul $\frac{1}{2} \leq a < 1$, $b > 0$, $x_0 > 0$, dar lasă deschisă problema în cazul $\frac{1}{2} < a < 1$, $b > 0$, $x_0 > 0$. Totuşi, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ fiind mărginit (Prop. 7), conform Lemei lui Cesàro, există un subşir convergent al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$.
Acest subşir are limita λ, aşa cum rezultă din demonstraţia Propoziţiei 8.

Bibliografie

[1] Colectiv — Bacalaureat, Matematică 2007, Ed. Sigma, Bucureşti, 2007, pg. 72.

[2] Sireţchi, Gh. — Calculul diferenţial şi integral, vol.2, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1985, pg. 80.

Valeriu V. Bărbieru — profesor, Şc. Gen. „Al. Ştefulescu”, Tg-Jiu
Cornelia Elena Bărbieru — profesor, C.N.T.V., Tg-Jiu

Asupra unor condiţii suficiente de comutativitate ale unui inel unitar

Mihai Bunget,profesor

C.N. ”Tudor Vladimirescu”, Tg-Jiu

Există numeroase rezultate referitoare la comutativitatea inelelor. Printre acestea amintim:

1.**Teorema lui Wedderburn** : Dacă R este un inel finit integru atunci R este comutativ.

2.**Teorema lui Jacobson** : Dacă pentru orice element a din inelul R există un întreg $n>1$, depinzând de a, astfel încât $a^n = a$, atunci R este comutativ.

3.**Teorema lui Jacobson-Herstein** : Dacă pentru orice elemente a,b din inelul R există un întreg $n>1$, depinzând de a și b, astfel încât $(ab-ba)^n = ab-ba$, atunci R este comutativ.

4.**Teorema lui Herstein** : Dacă pentru inelul R există un $n>1$ întreg astfel încât $a^n - a \in Z(R)$, centrul lui R, oricare ar fi a din R, atunci este comutativ.

5.**Teorema lui Herstein** : Dacă pentru orice element a al inelului R există un polinom $p \in \mathbb{Z}[X]$ depinzând de a, astfel încât $a^2 p(a) - a \in Z(R)$, atunci R este comutativ.

6.**Teorema lui Herstein** : Dacă pentru orice elemente a,b din inelul R există un întreg $n>1$, depinzând de a şi b, astfel încât $(a^n - a)b = b(a^n - a)$, atunci R este comutativ.

În continuare vom considera R un inel unitar, $Z(R) = \{x \in R \mid \mathrm{xy} = \mathrm{yx}, \forall \mathrm{y} \in \mathrm{R}\}$ centrul lui R şi pentru orice elemente x şi y din R notăm $[x,y] = xy - yx$.

Considerăm afirmaţiile :

(P_1) : Există $k \geq 1$ întreg fixat astfel încât $(xy)^{k+1} = x^k y^{k+1} x, \forall x,y \in R$.

(P_2) : Există $k \geq 1$ întreg fixat astfel încât $(xy)^{k+1} = yx^{k+1} y^k, \forall x,y \in R$.

Matematicienii Abujabal şi Khan au arătat următoarea :

7.**Proprietate** : Dacă pentru orice x şi y din R avem $(xy)^2 = xy^2 x$ sau $(xy)^2 = yx^2 y$, atunci R este comutativ.

Observaţie : Această proprietate arată că pentru $k=1$ proprietăţile (P_1), respectiv (P_2) sunt condiţii suficiente de comutativitate pentru inelul R.

8. **Exemplu** : Fie $R=\left\{\alpha I_3+A/A=\begin{pmatrix}0&\beta&\gamma\\0&0&\delta\\0&0&0\end{pmatrix}, unde. \alpha,\beta,\gamma,\delta\in Z_p\right\}$,unde p este număr prim impar. Avem R inel finit necomutativ în care sunt îndeplinite condiţiile (P1) şi (P2) pentru $k=p-1$. Într-adevăr, dacă luăm $x=aI_3+A$ şi $y=bI_3+B$, avem $(xy)^p=(abI_3+aB+bA+AB)^n=(abI_3+C)^n=$ $a^pb^pI_3$, deoarece coeficienţii termenilor din dezvoltare sunt divizibili cu p, deci in $\mathbb{Z}_p$ sunt 0, iar $C^p=0_3$, deoarece $p\geq 3$. Membrul drept al proprietăţii (P2) este

$x^{p-1}y^px=(aI_3+A)^{p-1}(bI_3+B)^p(aI_3+A)=(aI_3+A)^{p-1}b^pI_3(aI_3+A)=b^pI_3(aI_3+A)^p=b^pI_3a^pI_3=$ $a^pb^pI_3=(xy)^p$, de unde rezultă că inelul R verifică proprietatea (P1). Analog se arată şi (P2). Acest exemplu ne arată că (P1) şi (P2) nu sunt condiţii suficiente pentru $k\geq 2$.

Apare astfel în mod natural întrebarea : în ce condiţii suplimentare se poate forţa comutativitatea unui inel oarecare ce satisface (P1) sau (P2) ?

9.**Definiţie** : Definim funcţia $x\to x^k$ ca anti-omomorfism pe R dacă satisface condiţiile : $(xy)^k=y^kx^k$ şi $(x+y)^k=x^k+y^k$, pentru orice x,y din R, unde $k>1$ întreg fixat.

10.**Teoremă** : Fie R un inel unitar ce satisface (P1) sau (P2). Dacă R satisface proprietatea din definiţia 9, atunci R este comutativ.

Dem : Fie $k>1$. Presupunem că R satisface (P1). Aceasta se poate scrie echivalent: $x(yx)^k=x^ky^{k+1}x$, pentru orice x,y din R. Din definiţia 9 obţinem : $x^k\left[x,y^{k+1}\right]=0$, pentru orice x,y din R (1).

Înlocuind x cu $x+1$ în (1) şi utilizând $(1+x)^k=1+x^k$ obţinem : $\left[x,y^{k+1}\right]=0$ (2).

Înlocuind y cu $y+1$ în (2) obţinem : $y^k+y\in Z(R),\forall y\in\mathbb{R}$ (3).

Înlocuind y cu y^k în (3) obţinem $\left(y^k\right)^k+y^k\in Z(R)$, şi prin scăderea celor două expresii obţinem $\left(y^k\right)^k-y\in Z(R),\forall y\in\mathbb{R}$. Folosind teorema 4 deducem comutativitatea lui R.

Observaţie : Iată şi o demonstraţie a teoremei 4 pentru n=2 :

Avem $x^2-x\in Z(R),\forall x\in R$. Obţinem pentru x şi y din R : $(x+y)^2-(x+y)\in Z(R)$, $x^2-x\in Z(R), y^2-y\in Z(R)$ Din faptul că $Z(R)$ este parte stabilă la adunare şi scădere , deducem că $xy+yx\in Z(R)$, deci $x(xy+yx)=(xy+yx)x$, de unde $x^2y=yx^2$, astfel că $x^2\in Z(R)$. Cum avem şi $x^2-x\in Z(R)$ deducem că $x\in Z(R)$ deci R este comutativ.

Bibliografie :

[1] H. A. S. Abujabal and M. A. Khan, *Some elementary commutativity theorems for associative rings*, Kyungpook Math. J., 33(1993), 49-51.

[2] E. C. Johnson, E. C. Outcalt and A. Yaqub, *An elementary commutativity theorem for rings*, Amer. Math. Monthly, 75(1968), 288-289.

[3] I. N. Herstein, *Power maps in rings*, Michigan Math. J., 8(1961), 29-32.

[4] I. N. Herstein, *A generalization of theorem of Jacobson*, Amer. J. Math., 73(1951),756-762.

Principiul trinomului în stabilirea unor inegalități

Sterian Modroiu
Șc. Gen. Drăgutești

Dacă $f \in \mathbb{R}[X], f = aX^2 + bX + c$ și se consideră cunoscut faptul că $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, dacă $\Delta \leq 0$ și $a > 0$, în cele ce urmează vom demonstra unele inegalități importante folosindu-ne de una din reciprocele teoremei de mai sus și anume:

” Dacă $a > 0$ și $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci $\Delta \leq 0$”.

1. Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz pentru numere reale.

Fie numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, atunci : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$, cu egalitate dacă și numai dacă există $p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât $pa_i = qb_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demonstrație: Vom folosi trinomul $f = \sum_{i=1}^{n} (a_i X - b_i)^2$. Observăm că $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Pe de altă parte $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 x^2 - 2a_i b_i x + b_i^2) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$. Evident $a = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$. În concluzie $\Delta \leq 0$, adică $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$, ceea ce conduce la inegalitatea din enunț.

Egalitatea are loc în relația dată dacă $\Delta = 0$. Atunci există $r \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(r) = 0$. Dar $f(r) = 0$ înseamnă $a_i \cdot r = b_i, \forall i = \overline{1,n}$ și deci numerele p, q din enunț sunt $p = r$ și q=1.

2. Inegalitatea lui Aczél.

Fie $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ și $a_1^2 \geq a_2^2 + ... + a_n^2$, atunci :
$(a_1 b_1 - a_2 b_2 - ... - a_n b_n)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2 - ... - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - ... - b_n^2)$ cu egalitatea dacă și numai dacă există p, q numere reale astfel încât $pa_i = qb_i, \forall i = \overline{1,n}$.

Demonstrație: Vom folosi trinomul $f = (a_1 X - b_1)^2 - (a_2 X - b_2)^2 - ... - (a_n X - b_n)^2$. Cum $a_1 \neq 0$, pentru $r = \frac{b_1}{a_1}$ avem: $f(r) = -(a_2 r - b_2)^2 - ... - (a_n r - b_n)^2 \leq 0$. Dar
$f(x) = (a_1^2 - a_2^2 - ... - a_n^2)x^2 - 2(a_1 b_1 - a_2 b_2 - ... - a_n b_n)x + (b_1^2 - b_2^2 - ... - b_n^2)$. Coeficientul dominant $a_1^2 - a_2^2 - ... - a_n^2 > 0$. Concluzionăm că $\Delta \geq 0$, adică
$(a_1 b_1 - a_2 b_2 - ... - a_n b_n)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2 - ... - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - ... - b_n^2)$.

Dacă avem egalitate în enunț, atunci $\Delta = 0$ și deci $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă $f(r) \geq 0$ cu $r = \frac{b_1}{a_1}$ și cum stabilisem că $f(r) \leq 0$, deducem $f(r) = 0$, adică $a_j r = b_j$, $j = \overline{1,n}$. Deci $p = r = \frac{b_1}{a_1}$ și $q = 1$.

3. O altă inegalitate (propusă de D. Miheț)

Fie $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ numere reale și $a_i \le b_i, \forall i = \overline{1,n}$. Atunci :

$$\sum_{1\le i<j\le n} \left(a_i a_j + b_i b_j\right)^2 \ge 4\left(\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_j\right)\left(\sum_{1\le i<j\le n} b_i a_j\right).$$

Demonstrație: Fie trinomul $f = \sum_{1\le i<j\le n} \left(a_i X - b_i\right)\left(b_j X - a_j\right) =$

$\left(\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_j\right) X^2 - \left(\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j + \sum_{1\le i<j\le n} b_i b_j\right) X + \sum_{1\le i<j\le n} b_i a_j$. Evident $a > 0$ și în plus avem $f(1) \le 0$ din restricția $a_i \le b_i$. Deci $\Delta \ge 0$, adică $\sum_{1\le i<j\le n} \left(a_i a_j + b_i b_j\right)^2 \ge 4\left(\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_j\right)\left(\sum_{1\le i<j\le n} b_i a_j\right)$.

Bibliografie :

1. C. Năstăsescu, C. Niță – Exerciții și probleme de algebră pentru clasele IX-XII, E.D.P., București, 1985

2. Gazeta Matematică 9/1985.

Liceul Louis-le-Grand, testul pentru intrarea în clasa preparatoare MPSI, sesiunea 2009.

Exercițiul 1. Arătați că sistemul $\begin{cases} x^4+y^4=z^4 \\ x^5+y^5=z^5 \end{cases}$, nu admite nici o soluție în intervalul $(0,\infty)$.

Soluție: Presupunem prin absurd că există o soluție (x,y,z). Punem $u=\frac{x}{z}$ și $v=\frac{y}{z}$. Sistemul devine $\begin{cases} u^4+v^4=1 \\ u^5+v^5=1 \end{cases}$. Cum $0<u<1$ și $0<v<1$,atunci $u^5+v^5<u^4+v^4$, contradicție.

Exercițiul 2. Rezolvați în $\mathbb{R}^*$ ecuația $xe^x+e^{\frac{1}{x}}=0$. Arătați că această ecuație admite exact o rădăcină strict negativă, ce se va determina.

Soluție: Dacă ecuația admite soluție, în mod necesar acesta este negativă. Demonstrăm că această soluție este unică, studiind ecuația $f(x)=\ln(-x)+x-\frac{1}{x}=0$ obținută prin logaritmarea expresiei $-xe^x=e^{\frac{1}{x}}$. Avem $f'(x)=\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x+1}{x^2}>0$. Deci f admite cel puțin o rădăcină în intervalul $(-\infty,0)$. Prin urmare $x=-1$ este soluție unică.

Exercițiul 3. a) Arătați că, dacă 7 nu divide numărul întreg n, atunci 7 divide n^6-1.
b) Determinați numerele întregi $n\geq 1$ astfel ca 7 să dividă n^n-3.

Soluție: a) Calculăm n^6 mod 7 când n este congruent mod 7 cu 1,…,6 și obținem că $n^6-1\equiv 0$ mod7. (sau cu teorema lui Fermat)
b) Ținând cont de a) este suficient să discutăm numai resturile mod 6 și 7 ale lui n. În sfârșit, dacă $n\equiv m$ mod 6 și $n\equiv r$ mod 7, avem că $n^n=n^{6k+m}=n^{6k}n^m\equiv n^m\equiv\ r^m$ mod 7. Aceste calcule rezultă din tabelele de mai jos (elementul de la intersecția liniei i și coloanei j este restul lui i^j mod 7):

	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	1	2	4
3	1	3	2	6	4	5
4	1	4	2	1	4	2
5	1	5	4	6	2	3
6	1	6	1	6	1	6

Astfel, soluțiile problemei sunt întregii n care verifică $\begin{cases} n\equiv 3 \bmod 7 \\ n\equiv 1 \bmod 6 \end{cases}$ sau $\begin{cases} n\equiv 5 \bmod 7 \\ n\equiv 5 \bmod 6 \end{cases}$. Pentru unuia din aceste sisteme , este suficient să găsim o soluție particulară n_0 și observând că n este soluție a sistemului dacă și numai dacă $n-n_0$ este multiplu de 7 și 6, deci de $7\cdot 6=42$ (pentru că 6 și 7 sunt prime între ele).

Reamintim că pentru a obține o soluție particulară a sistemului diofantic $\begin{cases} n \equiv a \bmod \alpha \\ n \equiv b \bmod \beta \end{cases}$, cunoscând relația lui Bézout $n\alpha + v\beta = 1$ ($a, b, \alpha, \beta, u, v$ sunt numere întregi) este suficient să considerăm $bu\alpha + av\beta$; în sfârșit

$bu\alpha + av\beta \equiv av\beta \equiv a(1 - u\alpha) \equiv a \bmod \alpha$, și de asemenea

$bu\alpha + av\beta \equiv b \bmod \beta$.

Soluțiile sunt întregi congruenți cu 5 sau -11 mod 42.

Exercițiul 4. Fie triunghiul, cu $BC = a, AC = b$ și $AB = c$. Dacă $\widehat{BAC} \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, demonstrați că $a \leq \max(b, c)$.

Soluție: deoarece suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este π, atunci unul din celelalte unghiuri ale triunghiului dat este în mod necesar mai mare decât $\frac{\pi}{3}$. Latura opusă acestuia este deci mai mare sau egală cu a, ceea ce arată $a \leq \max(b, c)$.

Exercițiul 5. a) Aflați numerele reale a, b, c astfel ca pentru orice $x > 0$,

$$\frac{1}{x(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}.$$

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)(k+3)}$.

Soluție: a) Prin identificare se obține egalitatea

$$\frac{1}{x(x+2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{6}}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{x+2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+3}.$$

b) Punând $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, obținem $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)(k+3)} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} + \frac{1}{3}\sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} = \frac{1}{6}H_n - \frac{1}{2}\left(H_{n+2} - 1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(H_{n+3} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}H_n - \frac{1}{2}H_{n+2} + \frac{1}{3}H_{n+3} + \frac{3}{56}$.

Dacă notăm $O\left(\frac{1}{n}\right)$ majorat de $\frac{C}{n}$, avem $H_{n+2} = H_n + O\left(\frac{1}{n}\right)$ și $H_{n+3} = H_n + O\left(\frac{1}{n}\right)$. Deci $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)(k+3)} = \frac{3}{56} + O\left(\frac{1}{n}\right) \to \frac{3}{56}$.

Exercițiul 6. Fie x și y două numere reale pozitive sau nule. Arătați că

$$\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right| \leq \sqrt[3]{|x-y|}.$$

Soluție: Fără restricție presupunem că $x = u^3 \geq y = v^3$. Obținem

$\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right| \leq \sqrt[3]{|x-y|} \Leftrightarrow u - v \leq \sqrt[3]{u^3 - v^3} \Leftrightarrow (u-v)^3 \leq u^3 - v^3 \Leftrightarrow -3u^2v + 3uv^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3uv(v-u) \leq 0$.

Această inegalitate este adevărată, deci și inegalitatea dată este adevărată.

Exercițiul 7. Fie $P(x)=x^3-x+1$.

a) Arătați că P admite o singură rădăcină reală.

b) Arătați că P admite alte două rădăcini complexe β și $\gamma=\overline{\beta}$.

c) Notând $u_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$, $n\in\mathbb{N}$, calculați u_0,u_1,u_2.

d) Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, u_n aparține lui $\mathbb{Z}$.

e) Determinați $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi\alpha^n$.

Soluție: a) Avem $P'(x)=3x^2-1$, care se anulează în $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Astfel P crește până la $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, descrește între $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $\frac{1}{\sqrt{3}}$, și apoi crește. Cum $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1-\frac{2}{3\sqrt{3}}>0$, P nu se anulează între $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $\frac{1}{\sqrt{3}}$. P admite o singură rădăcină între $-\infty$ și $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Cum $P(-1)=1$, avem $\alpha<-1$.

b) Polinomul $\frac{P(x)}{x-\alpha}$ este un polinom real de gradul al doilea care admite deci în $\mathbb{C}$ două rădăcini complexe conjugate β și γ. Considerăm termenul $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ și constatăm că $\alpha\beta\gamma=-1$, deci $\beta\overline{\beta}=\frac{-1}{\alpha}<1$. Deci, $|\beta|<1$.

c) Observăm că $\alpha+\beta+\gamma=1$ și $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$. Deci $u_0=3$, $u_1=0$ și $u_2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2$.

d) Cum α este rădăcină a lui P, avem $\alpha^3-\alpha+1=0$ și deci $\alpha^{n+3}-\alpha^{n+1}+\alpha^n=0$. Obținem o egalitate analogă pentru β și γ. Adunând aceste relații obținem $u_{n+3}-u_{n+1}+u_n=0$. Arătăm că $u_n\in\mathbb{Z}$. Pentru $n=0,1$ și 2 este evident. Presupunem că rezultatul este adevărat pentru $n\geq 2$. Atunci $u_{n+1}=u_{n-1}-u_{n-2}\in\mathbb{Z}$, relație de recurență cu ajutorul căreia rezultă cerințele problemei.

e) Cum $|\alpha^n|\to\infty$, nu putem deduce direct dacă $\sin\pi\alpha^n$ admite limită. Cum $u_n\in\mathbb{Z}$, $\sin\pi\alpha^n=\sin\pi\left(u_n-\beta^n-\gamma^n\right)=(-1)^{u_n+1}\sin\pi\left(\beta^n+\gamma^n\right)$. Avem $\left|\beta^n+\gamma^n\right|\leq 2|\beta|^n\to 0$. Deci $\left(\pi\left(\beta^n+\gamma^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir real care tinde către 0. Prin urmare $\sin\pi\left(\beta^n+\gamma^n\right)\to 0$ și $\sin\pi\alpha^n\to 0$.

Exercițiul 8. Determinați o primitivă a funcției $f(x)=e^{-x}\sin^2 x$.

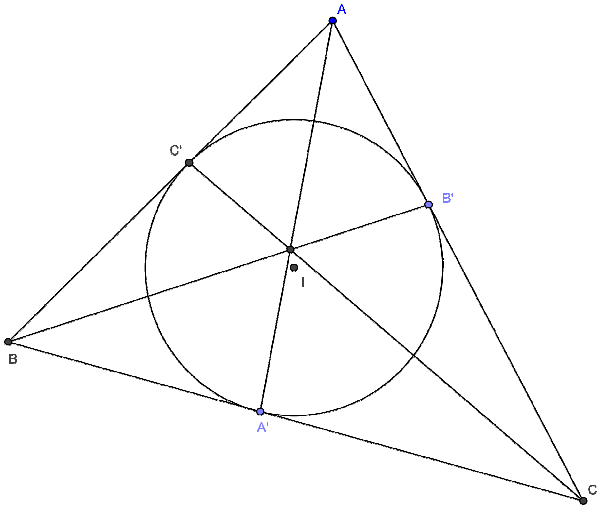
Soluție: Avem $e^{-x}\sin^2 x=e^{-x}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$. $I=\int e^{-x}\cos 2xdx$ se calculează prin părți:

$$I=\int e^{-x}\cos 2xdx=-e^{x}\cos 2x-2\int e^{-x}\sin 2xdx=-e^{x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-4\int e^{-x}\cos 2xdx$$

Deci $5I=e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)$. Prin urmare $\int e^{-x}\sin^2 x=-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}I=\ \frac{1}{10}e^{-x}\left(\cos 2x-2\sin 2x-5\right)$.

Exercițiul 9. Fie ABC un triunghi nedegenerat. Cercul înscris triunghiul ABC este tangent în A' la $[BC]$, în B' la $[CA]$ și în C' la $[AB]$. Arătați că dreptele $(AA'),(BB'),(CC')$ sunt concurente.

Soluție:



Fie I centrul cercului înscris. Acesta este punctul de concurență al bisectoarelor interioare. Punctul A' este proiecția ortogonală a lui I pe (BC), și în mod asemănător pentru celelalte. Fie r raza cercului înscris. Notăm cu 2α măsura unghiului $\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC'}\right)$ și cu 2β, 2γ celelalte. Avem $\frac{r}{AB'}=\frac{r}{AC'}=tg\alpha$; $\frac{r}{BC'}=\frac{r}{BA'}=tg\beta$; $\frac{r}{CA'}=\frac{r}{CB'}=tg\gamma$ și deci $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=\frac{r^3 ctg\beta\cdot ctg\gamma\cdot ctg\alpha}{r^3 ctg\gamma\cdot ctg\alpha\cdot ctg\beta}=1$. Ținând cont de poziția punctelor A',B' și C' pe segmentele $[BC],[CA]$ și $[AB]$ obținem $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1$.Vom arăta cum aplicăm teorema lui Céva , care afirmă că , în situația precedentă, cele trei drepte $(AA'),(BB')$ și (CC') sunt concurente.

Ținând cont de poziția punctelor A',B' și C' în raport cu triunghiul ABC, dreptele (AA') și (BB') sunt concurente în M. Punctul M este baricentrul lui $(A,\alpha),(B,\beta)$ și (C,γ). Prin asociativitatea baricentrului, M este baricentrul lui (A,α) și punctului A'' care este el însuși baricentrul lui (B,β) și (C,γ). Rezultă că M este pe dreapta (AA''). Cum A'' aparține lui (BC) și (AA') înseamnă că $A''=A'$ și deci A' este baricentrul lui (B,β) și (C,γ). Acesta se scrie $\beta\overrightarrow{A'B}+\gamma\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$ sau algebric, $\beta\overline{A'B}+\gamma\overline{A'C}=0$ sau $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=-\frac{\gamma}{\beta}$. La fel $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=-\frac{\alpha}{\gamma}$. Deci $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-\frac{\beta}{\alpha}$. Rezultă că $\alpha\overrightarrow{C'A}+\beta\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$, deci C' este baricentrul lui (A,α) și (B,β). În consecință M este baricentrul lui (C,γ) și $(C',\alpha+\beta)$, deci este pe dreapta (CC''), adică cele trei puncte sunt concurente.

Exercițiul 10. Fie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri reale. Presupunem că șirurile $(u_n\cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(u_n{}^2-v_n{}^4)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite. Arătați că șirurile $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite.

Soluție: Fie numerele reale M și M' mai mari decât 1 astfel ca $\left|u_n^2 - v_n^4\right| \le M$ și $\left|u_n v_n\right| \le M'$. Prima inegalitate se scrie $\left|u_n - v_n^2\right| \cdot \left|u_n + v_n^2\right| \le M$. Presupunem că $\left|u_n - v_n^2\right| \le \sqrt{M}$ (pentru un n dat). Punând $A_n := u_n - v_n^2$ și $B_n := u_n v_n$ rezultă $u_n = A_n + v_n^2$. Obținem $v_n^3 = -A_n v_n + B_n$. Dacă $\left|v_n\right| \ge 1$ rezultă $\left|v_n^3\right| \le \left|v_n^2\right|\left(\sqrt{M} + M'\right)$, deci $\left|v_n\right| \le \sqrt{M} + M'$. Această inegalitate este verificată de asemenea dacă $\left|v_n\right| \le 1$. Dacă $\left|u_n + v_n^2\right| \le \sqrt{M}$, rezultatul este analog. Deci, pentru orice $n, \left|v_n\right| \le \sqrt{M} + M'$. Rezultă că șirul $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. Cum $\left|u_n^2 - v_n^4\right| \le M$, șirul $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este de asemenea mărginit.

Exercițiul 11. Pentru $n \ge 2$, determinați numărul surjecțiilor de la $[1,n]$ la $[1,2]$.

Soluție: Partiționăm $[1,n]$ în două mulțimi nevide, prin care elementele primei mulțimi se duc în 1 și elementele celei de-a doua se duc în 2. O astfel de partiție este determinată de o mulțime cu p elemente, cu $p \in [1, n-1]$ și cea de-a doua fiind complementara ei. Există $\sum_{p=1}^{n-1} C_n^p = 2^n - 2$ posibilități care sunt egale cu numărul funcțiilor surjective.

Exercițiul 12. Fie n un număr natural, $n \ge 1$. Arătați că există un număr real ε_n care are următoarea proprietate: oricare ar fi numerele naturale nenule $k_1, k_2, ..., k_n$ astfel ca $\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_n} < 1$, deci $\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_n} < 1 - \varepsilon_n$.

Soluție: Fără a restrânge generalitatea presupunem că $k_1 \le k_2 \le ... \le k_n$. Procedăm prin recurență asupra lui n. Cazul $n = 1$ este evident cu $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$; presupunem că rezultatul este adevărat pentru $n-1$. Fie $k_1, k_2, ..., k_n$ astfel ca $\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_n} < 1$.

Presupunem mai întâi $k_n \ge \frac{2}{\varepsilon_{n-1}}$. Cum $\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_{n-1}} < 1$, ipoteza de recurență asigură că $\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_{n-1}} < 1 - \varepsilon_{n-1}$, deci că $\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_n} < 1 - \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}$.

Dacă $k < \frac{2}{\varepsilon_{n-1}}$, k_n ia valori într-o mulțime finită. Cum $k_i \le k_n$, celelalte numere k_i iau, de asemenea, valori tot într-o mulțime finită. În consecință mulțimea sumelor $\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_n}$ corespunzătoare este o mulțime finită care conține maximul său. Acest maxim este strict mai mic decât 1. Dacă îl notăm $1 - \eta_n$, cu $\eta_n > 0$ observăm că $\varepsilon_n := \min\left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}, \eta_n\right)$ răspunde cerinței problemei.

PROBLEME REZOLVATE DIN NR. 1/2010

CLASA A V-A

Problema G1. Ordonați crescător numerele: $\frac{2012}{2006},\frac{2013}{2007},\frac{2014}{2008},\frac{2015}{2009},\frac{2016}{2010}$.

Petre Ciungu, profesor
C.C. ”Virgil Madgearu”, Tg-Jiu

Rezolvare: Numerele se pot scrie: $1+\frac{6}{2006},1+\frac{6}{2007},1+\frac{6}{2008},1+\frac{6}{2009},1+\frac{6}{2010}$. Cum $\frac{6}{2006}>\frac{6}{2007}>\frac{6}{2008}>\frac{6}{2009}>\frac{6}{2010}$ rezultă că numerele sunt ordonate crescător astfel: $\frac{2016}{2010},\frac{2015}{2009},\frac{2014}{2008},\frac{2013}{2007},\frac{2012}{2006}$.

Problema G2. Suma a nouă numere naturale este 2011. Suma a şase dintre acestea este 1001. Este adevărat că produsul celor nouă numere este întotdeauna multiplu de 4? Justificare.

Marina Constantinescu, profesor
Sc. Gen. ”C. Săvoiu”, Tg-Jiu

Rezolvare: Dintre cele șase ce au suma 1001, cel puțin unul este par, deoarece dacă toate ar fi impare suma lor ar fi para. Analog, din celelalte cinci ce au suma 1010, unul este par, deoarece dacă toate ar fi impare suma lor ar fi impară. Deci produsul celor nouă numere este multiplu de 4.

Problema G4. . Un număr $\overline{abcd}$, cu a,b,c,d cifre distinctive , are cifra unităților și cifra miilor consecutive iar suma dintre cifra zecilor și cifra sutelor maximă. Dacă numărul este divizibil cu 10, aflați numărul.

Ion Sanda, profesor
Șc. Gen. Nr. 2, Motru

Rezolvare: Din datele problemei se obține $b+c=17$, de unde $b=8,c=9$ sau $b=9,c=8$. Dacă $\overline{abcd}$ este multiplu de 10 rezultă $d=0$, de unde se obține $a=1$. Deci $\overline{abcd}\in\{1890,1980\}$

Problema G7. Determinați numărul n natural, știind ca n^2-n+2 este prim.

Velcea Emilia, profesor
Șc. Gen. Nr.2 Lupeni, Hunedoara

Rezolvare: Numărul se scrie $n(n-1)+2$ și este par, deoarece $n(n-1)$ este par. Deoarece singurul număr prim și par este 2 rezultă că $n(n-1)=0$, de unde se obține $n=0$ sau $n=1$.

CLASA A VI-A

Problema G12. Să se afle numerele naturale a,b,c, știind că $1\le a<b<c$ și că $c=\frac{a+b}{ab-1}$.

Petre Ciungu, profesor
C.C. ”Virgil Madgearu”, Tg-Jiu

Rezolvare: $c=\frac{a+b}{ab-1}<\frac{2ab}{ab-1}$. Pe de altă parte, din $1\le a,b\Rightarrow 2a-1\ge 1$ și $b\ge 2\Rightarrow b(2a-1)\ge 2\Rightarrow 2ab-b\ge 2\Rightarrow b\le 2ab-2\Rightarrow \frac{b}{ab-1}\le 2\Rightarrow \frac{2b}{ab-1}\le 4\Rightarrow c\le 4$, cu soluții $a=1,b=2,c=3$.

Problema G13. Aflați numerele naturale a,b,c proporționale cu 2,3 și 8 dacă $a^b=c$.

Ion Sanda, profesor
Șc. Gen. Nr. 2, Motru

Rezolvare: Din datele problemei avem $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{8}$ de unde rezultă $a=\frac{2b}{3}$ și $c=\frac{8b}{3}$. Înlocuind în a doua relație se obține $\left(\frac{2b}{3}\right)^b=\frac{8b}{3}$, adică $2^b\cdot b^b\cdot 3=3^b\cdot 8\cdot b$. Împărțind relația cu $2^3\cdot 3\cdot b$ se obține relația $2^{b-3}\cdot b^{b-1}=3^{b-1}$.

Dacă $b>3$ atunci $2^{b-3}\cdot b^{b-1}$ este multiplu de 2, de unde rezultă 3^{b-1} multiplu de 2, fals.
Dacă $b<3$ rezultă $b-3<0$, fals.
Deci singura soluție este $b=3$, de unde rezultă $a=2$ și $c=8$.

Problema G16. Se consideră zece unghiuri în jurul unui punct care verifică simultan condiţiile:
i) oricum am lua trei dintre aceste unghiuri, există cel puţin două de aceeaşi măsură
ii) valoarea cea mai mică a măsurilor celor zece unghiuri este 27°, iar valoarea cea mai mare a măsurilor lor este 45°.
Să se determine măsurile celor zece unghiuri.

Marina Constantinescu, profesor
Sc. Gen. ”C. Săvoiu”, Tg-Jiu

Rezolvare: Fie x măsura unui unghi oarecare din cele zece unghiuri. Considerăm unghiurile de măsuri $x,27^\circ,45^\circ$ aflate în mulţimea celor zece unghiuri. Conform i) se observă că $x=27^\circ$ sau $x=45^\circ$. Deci orice unghi are măsura 27° sau 45°. Fie n numărul unghiurilor de măsura 27°. Obţinem $27^\circ\cdot n+45^\circ\cdot(10-n)=360^\circ\Rightarrow n=5$.

CLASA A VII-A

Problema G20. Pentru orice numere întregi a și b demonstrați că:
a) Dacă $5|2a+3b$, atunci $5|2a^2+3b^2$.
b) Dacă $5|2a^2+3b^2$, atunci $5|2a+3b$ sau $5|2a-3b$.

Valeriu V. Bărbieru – profesor, Șc. Gen. “Al. Ștefulescu”, Tg. Jiu
Cornelia Elena Bărbieru – profesor, C. N. “Tudor Vladimirescu”, Tg. Jiu

a) Rezolvare: dacă $a,b\in\mathbb{Z}$ au loc echivalențele:
$5|2a+3b\Leftrightarrow 5|2(a-b)+5b\Leftrightarrow 5|2(a-b)\Leftrightarrow 5|(a-b)$, adică $5|2a+3b\Leftrightarrow 5|(a-b)$ **(1)**

Repetăm procedeul si avem:

$5 \mid 2a^2+3b^2 \Leftrightarrow 5 \mid a^2-b^2 \Leftrightarrow 5 \mid (a-b)(a+b) \Leftrightarrow 5 \mid (a-b)$ sau $5 \mid (a+b)$

adică $5 \mid 2a^2+3b^2 \Leftrightarrow 5 \mid (a-b)$ sau $5 \mid (a+b)$ **(2)**

din **(1)** si **(2)** rezultă implicațiile:

$5 \mid 2a+3b \Rightarrow 5 \mid (a-b) \Rightarrow 5 \mid 2a^2+3b^2$ sau $5 \mid 2a+3b \Rightarrow 5 \mid 2a^2+3b^2$

b) Ținând seama de **(2)** deosebim două cazuri:

b1) $5 \mid (a-b)$ din **(1)** rezultă imediat $5 \mid 2a+3b$ prin urmare

$5 \mid 2a^2+3b^2$ rezultă $5 \mid 2a+3b$

b2) $5 \mid (a+b)$ avem:

$5 \mid a+b$ rezultă $5 \mid a-(-b) \Rightarrow$ (1) $5 \mid 2a+3(-b)$ $5 \mid 2a-3b \Rightarrow$, prin urmare

$5 \mid 2a^2+3b^2 \Rightarrow 5 \mid 2a-3b$

Problema este complet rezolvată.

Problema G22. Se dă triunghiul ABC și punctele N, P, E și F - mijloacele segmentelor $[AC]$, $[AB]$, $[CP]$ respectiv $[CP]$. Dacă $BN \cap CP = \{G\}$, $AF \cap NP = \{B_1\}$ și $AE \cap NP = \{C_1\}$, demonstrați că $\Delta GB_1C_1 \sim \Delta ABC$ și determinați raportul de asemănare.

Valeriu V. Bărbieru – profesor, Șc. Gen. "Al. Ștefulescu", Tg. Jiu
Cornelia Elena Bărbieru – profesor, C. N. "Tudor Vladimirescu", Tg. Jiu

Rezolvare: Fie $BM \cap CP = \{N\}$ și $DP \cap AM = \{Q\}$. Se demonstrează că $MNPQ$ este un pătrat, urmând de exemplu indicațiile de mai jos:

$\Delta MAB \equiv \Delta NBC \equiv \Delta PCD \equiv \Delta QDA$ deci $MNPQ$ este dreptunghi , având 3 unghiuri drepte.

$MN = NP$ ca diferență de lungimi egale. Deci $MNPQ$ este pătrat.

În continuare, fie $AB = a$. Demonstrația în sine se bazează pe următorul rezultat:

Într-un triunghi dreptunghic având un unghi de 15^0, înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este $\frac{1}{4}$ din ipotenuză. Triunghiul MAB fiind unul dintre acestea vom avea:

$A_{\Delta MAB} = \frac{AB \cdot h_{AB}}{2} = \frac{a \cdot \frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2}{8}$, $A_{\Delta MAB} = \frac{a^2}{8}$, sau $A_{\Delta MAB} = \frac{a^2}{8}$. Exprimam aria pătratului $MNPQ$ în două moduri:

$$A_{MNPQ} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\Delta MAB} = a^2 - 4\frac{a^2}{8} = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2},\ A_{MNPQ} = \frac{a^2}{2}.$$

$$A_{MNPQ} = MN^2 = \frac{MP^2}{2}$$

Din cele de mai sus rezulta că $MP = AB$.

CLASA A VIII-A

Problema G31. Fie a și b cifre nenule ale sistemului zecimal. Demonstrați că:

a) $\frac{19}{91} \leq \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} \leq \frac{91}{19}$.

b) $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}$ este număr natural dacă și numai dacă a=b.

Valeriu V. Bărbieru – profesor, Şc. gen. "Al. Ştefulescu", Tg. Jiu
Cornelia Elena Bărbieru – profesor, C. N. "Tudor Vladimirescu", Tg. Jiu

Rezolvare: a) Dacă $a,b \in \{1,2,...,9\}$, atunci:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} - \frac{19}{91} = \frac{91\cdot\overline{ab} - 19\cdot\overline{ba}}{91\cdot\overline{ba}} = \frac{91(10a+b) - 19(10b+a)}{91\overline{ba}} = \frac{891a - 99b}{91\overline{ba}} = \frac{99(9a-b)}{91\overline{ba}} \geq 0$$

Se observă ca egalitatea are loc numai dacă $a = 1$ si $b = 9$.

Rezultă că $\frac{19}{91} \leq \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}$

Demonstrație analoagă pentru cealaltă inegalitate.

b) Fie $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = k \in N$, deci $k \geq 1$.

Avem: $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = k \Leftrightarrow 10a + b = k(10b+a) \Leftrightarrow b = \frac{10-k}{10k-1}\cdot a$ (1)

Pe de altă parte din $\frac{19}{91} \leq \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} \leq \frac{91}{19} = 4\frac{15}{19}$ si $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = k \in N^*$ rezultă că k aparține$\{1,2,3,4\}$ (2)

Din (1) si (2) obținem $b \in \left\{a, \frac{8}{19}a, \frac{7}{29}a, \frac{2}{13}a\right\}$, cu $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Cum $b \in \mathbb{N}$, deducem $b = a$ sau $\frac{19}{8}a$ sau $\frac{29}{7}a$ sau $\frac{13}{2}a$.

Analog pentru celelalte cazuri rămânând singura posibilitate $a = b$.
Reciproca este imediata.

Problema G33. Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in (0,a]$, $(a > 0)$ astfel încât $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = \frac{n}{a}$. Calculați $x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Petre Ciungu, profesor
C.C. Virgil Madgearu, Tg-Jiu

Rezolvare: Din $x_i \in (0,a], i = \overline{1,n} \Rightarrow 0 < x_i \leq a$ și $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{x_i}$. Deci $\frac{n}{a} = \underbrace{\frac{1}{a} + ... + \frac{1}{a}}_{de\ n\ ori} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}$.

Rezultă că inegalitățile nu pot fi stricte şi deci $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = ... = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$, de unde $x_1 = x_2 = ... = x_n = a$.

Deci suma este
$x_1 + x_2 + ... + x_n = na$.

Problema G37. Se consideră o mulţime infinită A de numere reale cu proprietatea că suma oricăror 2010 numere distincte din A este număr raţional. Să se arate că $A \subset \mathbb{Q}$.

Mircea Constantinescu, profesor
C.N. Ecaterina Teodoroiu, Tg-Jiu

Rezolvare: Arătăm iniţial că dacă $a,b \in A$ atunci $a-b \in \mathbb{Q}$. Considerăm mulţimile $\{a,x_1,x_2,...,x_{2009}\}$ şi $\{b,x_1,x_2,...,x_{2009}\}$, unde $x_1,x_2,...,x_{2009} \in A$ distincte două câte două şi distincte de a şi b. Atunci $a+x_1+x_2+...+x_{2009} \in \mathbb{Q}$ şi $b+x_1+x_2+...+x_{2009} \in \mathbb{Q}$ deci $(a+x_1+x_2+...+x_{2009})$ - $(b+x_1+x_2+...+x_{2009}) \in \mathbb{Q}$, deci $a-b \in \mathbb{Q}$.

Fie acum $a \in A$ arbitrar. Vom arăta că $a \in \mathbb{Q}$, de unde concluzia. Fie $x_1,x_2,...,x_{2010} \in A$ distincte două câte două. Avem $2010 \cdot a = (a-x_1)+(a-x_2)+...+(a-x_{2010})+(x_1+x_2+...+x_{2010}) \in \mathbb{Q}$, deci $a \in \mathbb{Q}$.

CLASA A IX-A

Problema L1. Dacă $a,b \in \mathbb{R}_+^*$, demonstrați că

$$\sqrt{ab}-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2} \le \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$$, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b$.

Valeriu V. Bărbieru – profesor, Șc. gen. "Al. Ștefulescu", Tg. Jiu
Cornelia Elena Bărbieru – profesor, C. N. "Tudor Vladimirescu", Tg. Jiu

Rezolvare: Dacă $a,b \in R, a>0, b>0$, fie $H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, G=\sqrt{ab}, A=\frac{a+b}{2}, P=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Media aritmetică , geometrică, armonică respectiv pătratică a numerelor a si b.
După cum se știe $H \le G \le A \le P$, cu egalitate numai dacă $a=b$.
De asemenea , in urma unui simplu calcul, vom obține:

$$G=\sqrt{GH} \text{ și } P=\sqrt{2A^2-AH}.$$

Pentru a demonstra prima parte a inegalității vom folosii: $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \le \sqrt{\frac{x+y}{2}}; x>0; y>0$ **(1)**

Egalitatea are loc dacă si numai dacă $x=y$

Fie $x>0, y>0$ și $x \ne y$. Avem:

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} < \sqrt{\frac{x+y}{2}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+y}} \Leftrightarrow \frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+y}} \Leftrightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| > \frac{|x-y|}{\sqrt{2(x+y)}}.$$

Prin urmare pentru orice $x>0, y>0$ are loc inegalitatea: $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| > \frac{|x-y|}{\sqrt{2(x+y)}}$ **(2),** cu egalitate dacă și numai dacă $x=y$.

Să trecem la rezolvarea propriuzisă:

$$\sqrt{ab}-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow G-H\le P-A\Leftrightarrow\sqrt{AH}-H\le\sqrt{2A^2-AH}-A\Leftrightarrow\sqrt{2A^2-AH}-\sqrt{AH}\ge$$

$A-H$ **(3).**

Dacă $x=2A^2-AH$ și $y=AH$, atunci $x>0, y>0$ și $x\ge y$.

Din **(2)** rezultă: $\sqrt{2A^2-AH}-\sqrt{AH}\ge\frac{2A^2-AH-AH}{\sqrt{2\left(2A^2-AH+AH\right)}}=\frac{2A(A-H)}{2A}=A-H$ **(4)**.

Din **(3)** și **(4)** obținem prima parte a inegalității din enunț.
Egalitatea în **(4)** are loc dacă și numai dacă $2A^2-AH=AH$ (conform **(2)**) dacă $A=H$, adică $a=b$.

b) Avem:

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{a+b}{2}\le\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\Leftrightarrow P-A\le A-G\Leftrightarrow P+G\le 2A\Leftrightarrow\sqrt{2A^2-AH}+\sqrt{AH}\le 2A$ din **(1)**
rezultă:

$$\frac{\sqrt{2A^2-AH}+\sqrt{AH}}{2}\le\sqrt{\frac{2A^2-AH+AH}{2}}\Leftrightarrow\sqrt{2A^2-AH}+\sqrt{AH}\le 2A$$

Din ultimele obținem a doua inegalitate din enunț.

Egalitatea are loc $\Leftrightarrow 2A^2-AH=AH\Leftrightarrow A=H\Leftrightarrow a=b$

Problema L5. Fie $x,y,z\ge 0$. Arătaţi că :

$$\frac{x+y}{x+y+2z}+\frac{y+z}{y+z+2x}+\frac{z+x}{z+x+2y}+\frac{6(xy+yz+zx)}{(x+y+z)^2}\le\frac{7}{2}.$$

Andrei Răzvan Băleanu, elev
C.N. George Coşbuc, Motru

Rezolvare: Rescriem inegalitatea astfel:

$$\sum_{ciclică}\left(1-\frac{x+y}{x+y+2z}\right)\ge\frac{6(xy+yz+zx)}{\left(x+y+z\right)^2}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sum_{ciclică}\frac{x}{2x+y+z}\ge\frac{10P-S}{4P+2S},$$

unde $S=x^2+y^2+z^2$ şi $P=xy+yz+zx$.
Din. Din Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem:

$$\sum_{ciclică}\frac{x}{y+z+2x}=\sum_{ciclică}\frac{x^2}{2x^2+yx+zx}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2\sum x^2+2\sum xy}.$$

Este suficient să demonstrăm că:

$$\frac{S+2P}{2S+2P}\ge\frac{10P-S}{4P+2S},$$

Inegalitate adevărată deoarece $S\ge P$.

Problema L6. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $M,N\in[AB]$ astfel încât $\frac{MB}{AB}=k$ şi $\frac{NB}{AB}=t$, unde $k,t\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ şi $t\ge k$. Fie $P,Q\in\left[BC\right]$ astfel încât $BP=2kAB\cos\sphericalangle B$ şi $CQ=2tAB\cos\sphericalangle B$. Considerăm un punct S, variabil pe dreapta BC. Arătaţi că:

a) Dacă $S\in[PQ]$, atunci $\left(MB-MS\right)\left(NC-NS\right)\le 0$.

b) Dacă S se află pe restul dreptei BC, atunci $(MB-MS)(NC-NS)\geq 0$.

Andrei Răzvan Băleanu, elev
C.N. George Coşbuc, Motru

Rezolvare: Fie M' simetricul lui B faţă de M. Atunci $BM'=2kAB$. Fie M'' piciorul perpendicularei din M' pe BC. Atunci $BM''=2kAB\cos\sphericalangle B=BP$, deci punctele M'' şi P coincid. Cum M este mijlocul ipotenuzei în triunghiul $BM'P$, avem $PM=MB=MM'$. Deci, triunghiul MBP este isoscel. Cum mediatoarea segmentului $[BP]$ trece prin punctul M avem:

(1) $MB\geq MS$ dacă $M\in[BP]$.

(2) $MB\leq MS$ dacă M se află pe restul dreptei BC.

Analog se obţine:

(3) $NB\geq NS$ dacă $N\in[BQ]$.

(4) $NB\leq NS$ dacă N se află pe restul dreptei BC.

Din cele 4 relaţii se obţine imediat concluzia.

CLASA A X-A

Problema L12. Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ se consideră progresia aritmetică $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ cu termeni pozitivi. Demonstrați că :

a) $\sqrt{a_1a_n}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}<\dfrac{a_1+a_n}{2}$, oricare ar fi $n\geq 2$ și cu egalitate dacă și numai dacă $n=2$.

b) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leq\left[\left(1+\dfrac{1}{(n-1)n}\right)\left(1+\dfrac{2}{(n-1)n}\right)\ldots\left(1+\dfrac{n-1}{(n-1)n}\right)\right]^2<\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$, oricare ar fi $n\geq 2$ și cu egalitate numai dacă $n=2$.

Valeriu V. Bărbieru – profesor, Șc. Gen. “Al. Ștefulescu”, Tg. Jiu
Cornelia Elena Bărbieru – profesor, C. N. “Tudor Vladimirescu”, Tg. Jiu

Rezolvare: Vom demonstra mai întâi următoarea:

Propoziție: Dacă $(a_k)_{1\leq k\leq n}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ este o progresie aritmetică, atunci $a_1\cdot a_n\leq a_k\cdot a_{n-k+1}$ (1) pentru orice $1\leq k\leq n$ și cu egalitate numai dacă $k=1$ sau $k=n$.

Demonstrație: Fie $a_1=a$; r - rația progresiei; $1\leq k\leq n; n\geq 2$. Au loc echivalențele:
$a_1\cdot a_n\leq a_k\cdot a_{n-k+1}\Leftrightarrow a(a+(n-1)r)\leq[a+(k-1)r]\cdot[a+(n-k)r]\Leftrightarrow a^2+(n-1)ra\leq a^2+(n-1)ra+(k-1)(n-k)r^2$. Deoarece $1\leq k\leq n$, ultima inegalitate este adevărată.

Evident egalitatea are loc dacă si numai dacă $k=1$ si $k=n$

a) Fie o progresie aritmetica cu termenii pozitivi .

Din (1) făcând pe rând $k=1,2,\ldots,n$ rezultă:

$a_1 \cdot a_n \le a_1 \cdot a_n$

$a_1 \cdot a_n \le a_2 \cdot a_{n-1}$

.

.

.

$a_1 \cdot a_n \le a_{n-1} \cdot a_2$

$a_1 \cdot a_n \le a_n \cdot a_1$

Înmulțind inegalitățile (fiecare membru fiind pozitiv), obținem:

$$\left(a_1 \cdot a_n\right)^n \le \left(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{a_1 \cdot a_n} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

Dacă n≥3 si $k = 2$, atunci $k \ne 1$ și $k \ne n$, deci inegalitatea $a_1 \cdot a_n = a_k \cdot a_{n-k+1}$ (1) este strictă ,mai exact $a_1 \cdot a_n < a_2 \cdot a_{n-1}$. Cum inegalitățile din coloana de mai sus au toți membrii nenuli, in urma înmulțirii se va obține o inegalitate strictă;

Evident, pentru $n = 2$ avem egalitate.

Pentru inegalitatea din dreapta de la punctul a) al enunțului , aplicam inegalitatea A-G pentru termenii pozitivi ai progresiei aritmetice, diferiți doi cate doi.

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} < \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{\frac{(a_1 + a_n)}{2}n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

b) În continuare vom considera că și rația este pozitivă .

Prin ridicare la puterea $2n$ a inegalităților de la punctul a) obținem

$$\left(a_1 \cdot a_n\right)^n \le \left(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n\right)^2 < \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)^{2n} ; n \ge 2 \qquad (2)$$

daca $a_1 = a > 0$ și $r > 0$ este rația progresiei , avem:

$$a_1 \cdot a_n = a\left(a + (n-1)r\right) = a^2\left(1 + (n-1) \cdot \frac{r}{a}\right)$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = a\left(a + r\right)...\left(1 + (n-1)r\right) = a^n \cdot \left(1 + \frac{r}{a}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + (n-1)\frac{r}{a}\right)$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a + a + (n-1)r}{2} = a + \frac{(n-1)r}{2} = a\left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{r}{a}\right)$$

Notăm $\frac{r}{a} = x > 0$ și înlocuim în (2)

$$a^{2n} \cdot \left(1 + (n-1)x\right)^n \le a^{2n} \cdot \left[(1+x)(1+2x)...\left(1+(n-1)x\right)\right]^2 < a^{2n} \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2}x\right)^{2n} \Leftrightarrow$$

$$\left[1 + (n-1)x\right]^n \le \left[(1+x)(1+2x)...\left(1+(n-1)x\right)\right]^2 < \left(1 + \frac{n-1}{2}x\right)^{2n} ; n \ge 2 \qquad (3)$$

Se observă că aceste inegalități au loc pentru orice $x > 0$ și n mai mare sau egal cu 2, deoarece pentru x>0, există o progresie aritmetică cu $a_1 = a > 0$ și $r > 0$ astfel încât $x = \frac{r}{a}$

Dacă $n \ge 2$ este fixat si $x = \frac{1}{(n-1) \cdot n}$, atunci $\left[1 + (n-1) \cdot x\right]^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n si \left(1 + \frac{n-1}{2}x\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$.

Înlocuim în (3) și rezultă $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left[\left(1+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{(n-1)\cdot n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{n-1}{(n-1)\cdot n}\right)\right]^2 < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}; n \geq 2$

Problema L13. Rezolvaţi ecuaţia $1+(p-1)! = p^6$, p - prim, $p \geq 6$.

Antonie Cristian, profesor
C.N. Ecaterina Teodoroiu Tg-Jiu

Rezolvare: Presupunem ca ecuaţia are soluţie $\Rightarrow \exists\ p-$prim, $p>5$ astfel încât $(p-1)! = p^6-1$ **(1)**

$2 < \frac{p-1}{2} < p-1 \Rightarrow (p-1)^2 = 2\cdot\frac{p-1}{2}.(p-1) \mid (p-1)!$ **(2)**

Din **(1)** și **(2)** $\Rightarrow (p-1)^2 \mid p^6-1$

$\Rightarrow p-1 \mid p^5+p^4+p^3+p^2+p+1$

$\Rightarrow p-1 \mid p^5-1+p^4-1+p^3-1+p^2-1+p-1+6$.

Cum $p-1 \mid p^k-1, \forall k$ natural $\Rightarrow p-1 \mid 6 \Rightarrow 6 \geq p-1 \Rightarrow p \leq 7 \Rightarrow p=7$ (nu verifică ecuaţia)

$\Rightarrow$ ecuația nu are soluții.

Problema L14. Fie $a,b,c \in (0,1)$ sau $a,b,c \in (1,\infty)$. Arătaţi că:

$$\log_{ab^2c^2} b^5c^5 + \log_{a^2bc^2} c^5a^5 + \log_{a^2b^2c} a^5b^5 \leq 6.$$

Andrei Răzvan Băleanu, elev
C.N. George Coşbuc, Motru

Rezolvare: Rescriem inegalitatea astfel:

$$\sum_{ciclică} \frac{\log_n b + \log_n c}{\log_n a + 2\log_n b + 2\log_n c} \leq \frac{6}{5},$$

unde $n \in (0,1)$ dacă $a,b,c \in (0,1)$ și $n \in (1,\infty)$ dacă $a,b,c \in (1,\infty)$.

Fie $\log_n a = x > 0$, $\log_n b = y > 0$ şi $\log_n c = z > 0$. Inegalitatea de demonstrat devine:

$$\sum_{ciclică} \frac{y+z}{x+2y+2z} \leq \frac{6}{5} \Leftrightarrow \sum_{ciclică} \frac{2y+2z}{x+2y+2z} \leq \frac{12}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{ciclică}\left(1-\frac{2y+2z}{x+2y+2z}\right) \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum_{ciclică} \frac{x}{x+2y+2z} \geq \frac{3}{5}.$$

Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz avem:

$$\sum_{ciclică} \frac{x}{x+2y+2z} = \sum_{ciclică} \frac{x^2}{x^2+2xy+2xz} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sum x^2 + 4\sum xy}.$$

Cum $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ avem $\frac{(x+y+z)^2}{\sum x^2+4\sum xy} \geq \frac{3}{5}$ şi acum inegalitatea e demonstrată.

CLASA A XI-A

Problema L23. Fie $a,b>0, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ şi $M_n(a,b)$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n având toate elementele din mulţimea $\{a,b\}$. Dacă $\det(A)\geq 0, \forall A\in M_n(a,b)$ să se arate că $a=b$.

Mircea Constantinescu, profesor
C.N. Ecaterina Teodoroiu, Tg-Jiu

Rezolvare: Fie A matricea cu elementele de pe diagonala principală egale cu a şi restul egale cu b. Atunci $\det(A)=\left[a+(n-1)b\right]\cdot(a-b)^{n-1}$. Fie A' matricea obţinută interschimbând liniile 1şi 2 ale matricei A. Atunci $\det(A')=-\det(A)\leq 0$. Dar $A'\in M_n(a,b)\Rightarrow \det(A')\geq 0$, deci $\det(A')=0\Rightarrow \det(A)=0$. Deci $a=b$.

Problema L24. Să se arate că există un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale cu proprietatea că $a_{n+1}=\sqrt{a_n+\alpha}, \forall n\geq 1,$ dacă şi numai dacă $\alpha\geq -\frac{1}{4}.$

Mircea Constantinescu, profesor
C.N. Ecaterina Teodoroiu, Tg-Jiu

Rezolvare: Să presupunem că $\alpha<-\frac{1}{4}$ şi fie $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_{n+1}=\sqrt{a_n+\alpha}, \forall n\geq 1.$ Atunci $a_{n+1}=\sqrt{a_n+\alpha}<\sqrt{a_n-\frac{1}{4}}\leq\sqrt{a_n^2}=|a_n|=a_n, \forall n\geq 2$ (deoarece $a_n\geq 0, \forall n\geq 2$) şi atunci şirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este descrescător şi mărginit inferior, deci convergent. Dacă $l=\lim_{n\to\infty} a_n\in\mathbb{R},$ atunci trecând la limită în relaţia de recurenţă se obţine că $l^2-l-\alpha=0$ şi cum $\Delta=1+4\alpha<0$ rezultă că $l\notin\mathbb{R},$ fals. Dacă $\alpha\geq -\frac{1}{4}$ putem considera şirul constant $a_n=\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}, n\geq 1,$ care verifică relaţia dată.

Problema L25. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia $r>0$ cu proprietatea că între oricare doi termeni consecutivi ai progresiei există exact un număr natural. Atunci $r=1.$

Mircea Constantinescu, profesor
C.N. Ecaterina Teodoroiu, Tg-Jiu

Rezolvare: Din enunţ se obţine că între a_1 şi a_{n+1} există exact n numere naturale, adică $n-1\leq a_{n+1}-a_1\leq n+1, \forall n\in\mathbb{N}^*$, sau $n-1\leq r\cdot n\leq n+1, \forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow \frac{n-1}{n}\leq r\leq\frac{n+1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$, şi trecând la limită după $n\to\infty$ se obţine $r=1.$

CLASA A XII-A

Problema L29. Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, care admite primitive și are proprietatea că $|f(x)|\le ctg\, x,\ (\forall)x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Dacă F este o primitivă a lui f pentru care $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, demonstrați că există $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $F(\alpha)\le 1$.

Petre Ciungu, profesor
C.C. Virgil Madgearu, Tg-Jiu

Rezolvare: Funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, g(x)=\sin x\cdot F(x)$ este o funcție Rolle și în plus $g(0)=0=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Atunci conform teoremei lui Rolle, există $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $g'(\alpha)=0$. De aici rezultă

$\cos\alpha\cdot F(\alpha)+\sin\alpha\cdot f(\alpha)=0$, relație echivalentă cu $F(\alpha)=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot f(\alpha)$.

Din ultima relație rezultă $|F(\alpha)|=tg\alpha\cdot|f(\alpha)|$ și cum $|f(x)|\le ctgx,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $|F(\alpha)|\le 1$.

Problema L31. Se consideră polinomul $f=X^n+a_1X^{n-1}+...+a_{n-1}X^2+1\in\mathbb{R}[X]$, unde $a_{n-2}>0$. Să se arate că f nu are toate rădăcinile reale.

Petre Ciungu, profesor
C.C. Virgil Madgearu, Tg-Jiu

Rezolvare: Fie $x_1,x_2,...,x_n$ rădăcinile polinomului f, evident toate nenule. Polinomul $g=X^nf\left(\frac{1}{X}\right)=X^n+a_{n-2}X^{n-2}+...+1$ are rădăcinile $y_i=\frac{1}{x_i},i=\overline{1,n}$. Din relațiile lui Viète pentru polinomul se obține $y_1+...+y_n=0$ și $y_1y_2+...+y_{n-1}y_n=a_{n-2}$. Din acestea se deduce

$y_1^2+...+y_n^2=(y_1+...+y_n)^2-2(y_1y_2+...+y_{n-1}y_n)=-2a_{n-1}<0$, de unde rezultă concluzia.

Problema L36. Să se arate că $\int_0^1 x^2e^{x^2}dx\le\frac{e}{4}$.

Mircea Constantinescu, profesor
C.N. Ecaterina Teodoroiu, Tg-Jiu

Rezolvare: Avem

$$\int_0^1 x^2e^{x^2}dx\le\int_0^1\frac{x+x^3}{2}e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 xe^{x^2}dx+\frac{1}{4}\int_0^1 x^2\left(e^{x^2}\right)'dx=\frac{1}{2}\int_0^1 xe^{x^2}dx+\frac{1}{4}x^2e^{x^2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{e}{4}.$$

PROBLEME PROPUSE

CLASA A V-A

Problema G42. Comparați numerele $3\cdot 2^{n+1}$ și $2\cdot 3^{n+1}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

Marin Chirciu ,profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” ,Pitești

Problema G43. a) Arătați că 26 se scrie ca sumă de trei pătrate perfecte distincte.

b) Arătați că 676 se scrie ca sumă de trei pătrate perfecte distincte.

c) Arătați că 26^n se scrie ca sumă de trei pătrate perfecte distincte.

Marin Chirciu ,profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” ,Pitești

Problema G44. Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 3, n$ impar.

a) Aflați restul împărțirii numărului 6^n la 5.

b) Scrieți numărul 6^n ca suma a trei numere naturale consecutive pare.

c) Arătați că numărul 6^n se scrie ca diferența a două pătrate perfecte.

Marin Chirciu ,profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” ,Pitești

Problema G45. Dacă $n,m\in\mathbb{N}$, $n,m>2$ să se arate că numerele de forma $17^n\cdot 59^m+1003$ se divid cu 2006.

Ion Gheorghiu, profesor
C.C. „Virgil Madgearu’’, Tg-Jiu

Problema G46. Calculați suma $101+1001+...+1\underbrace{0...0}_{2010\,cifre}1$.

Stelică Modroiu, profesor
Șc. Gen. Drăguțești

Problema G47. Câte fracții subunitare de forma $\dfrac{4n+48}{8072}$, cu $n\in\mathbb{N}$, există ? Precizați câte din ele sunt ireductibile ?

Costin Zălog - Colibași, profesor
Șc. Gen. ”Pompiliu Marcea”,Tg-Jiu

Problema G48. Arătați ca fracțiile de forma $\dfrac{1}{\overline{1a3b}}$ se transformă in fracții zecimale periodice.

Radu Manta, profesor
G.S.I. Bârsești, Tg-Jiu

Problema G49. În trei lăzi se afla cantități egale de prune. Dacă se iau din fiecare lada cate 8kg, în toate lăzile la un loc rămâne o cantitate egală cu cea care era la început in fiecare ladă. Ce cantitate de prune a fost în total?

Adrian Popescu , profesor Șc. Gen. ”Sf. Nicolae” ,Tg-Jiu
Popica Adrian, profesor L.T. Novaci

Problema G50. Dorel este bolnav. Doctorul i-a dat sa ia pastile din jumătate in jumătate de oră. În cate minute ia Dorel primele 3 pastile?

Adrian Popescu , profesor Şc. Gen. ”Sf. Nicolae” ,Tg-Jiu
Simona Stoicoiu , profesor Şc. Gen. ”Constantin Săvoiu”, Tg-Jiu

Problema G51. În câte moduri putem alege două numere mai mici decât 2008 astfel încât diferența lor sa fie 576?

Adrian Popescu , profesor Şc. Gen. ”Sf. Nicolae” ,Tg-Jiu
Simona Stoicoiu , profesor Şc. Gen. ”Constantin Săvoiu”, Tg-Jiu

CLASA A VI-A

Problema G52. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$.

Arătați că $33(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)=83(x^3+y^3+z^3)$.

Marin Chirciu ,profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” ,Pitești

Problema G53. Fiind date numerele raționale pozitive a,b,c,x,y,z astfel încât $\frac{x}{a+x}+\frac{y}{b+y}+\frac{z}{c+z}=3-n^2$, unde $n \in \mathbb{N}$, arătați că numărul $\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+y}+\frac{c}{c+z}$ este natural, pătrat perfect.

Marin Chirciu ,profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” ,Pitești

Problema G54. Determinați restul împărțirii numărului $A=(9a-1)^{2n}-(9b-1)^{2m}$ $a,b,n,m \in \mathbb{N}^*$, la 9.

Marin Chirciu ,profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” ,Pitești

Problema G55. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuaţia: $2^x+1=y^2$.

Stoicoiu Simona, profesor
Şc. Gen. ”Constantin Săvoiu”, Tg-Jiu

Problema G56. Să se afle cele 2004 numere raţionale care sunt direct proporţionale cu numerele 1,2,3…,2004 ştiind că suma lor este 2005.

Ion Gheorghiu, profesor
C.C. ”Virgil Madgearu”, Tg-Jiu

Problema G57. Se dă N= 1!+2!+3!+4!+…+2005!+a, unde $a \in$ N, iar $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, pentru orice $n \in$ N. Să se arate că :

a) dacă $a \in \{0,4,5,9\}$, numărul N nu este pătrat perfect;

b) dacă $a \in \{0,2,4,6,8\}$, numărul N nu se divide cu 4;

c) dacă a= 2004, ultimele două cifre ale lui N sunt 1 şi 7.

Ion Gheorghiu, profesor
C.C. ”Virgil Madgearu”, Tg-Jiu

Problema G58. Să se găsească toate numerele întregi pozitive k astfel încât $k+1$să dividă pe k^2+1

Grigore și Doru Hortopan, profesori
Șc. Gen. Rugi

Problema G59. Determinați numărul dreptelor care trec prin 2010 puncte coplanare, dintre care oricum am alege trei, ele sunt necoliniare.

Stelică Modroiu, profesor
Șc. Gen. Drăguțești

Problema G60. Pe latura AB a triunghiului isoscel ABC $([AB]\equiv[AC])$ se construiește în exterior pătratul $ABDE$ .Să se calculeze măsura unghiului ECB .

Popica Adrian, profesor L.T. Novaci
Simona Stoicoiu , profesor Șc. Gen. ”Constantin Săvoiu”, Tg-Jiu

Problema G61. Se dă dreptunghiul $ABCD$. Notam cu F simetricul lui A față de diagonala BD. Demonstrați ca ΔBDF este dreptunghic.

Adrian Popescu , profesor Șc. Gen. ”Sf. Nicolae” ,Tg-Jiu
Simona Stoicoiu , profesor Șc. Gen. ”Constantin Săvoiu”, Tg-Jiu

Problema G62. Fie ABC un triunghi oarecare si fie punctele D, M, N , piciorul înălțimii din A pe BC, mijlocul laturii AB respectiv AC . Sa se arate că $3P_{\Delta DMN} > P_{\Delta ABC}$.

Claudiu Mândrilă, elev Dâmbovița

Problema G63. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA . Să se arate ca $AB+BD<3P_{MNPQ}-2P_{ABCD}$ și să se deducă și inegalitatea $6P_{MNPQ}>5P_{ABCD}$.

CLASA A VII-A

Problema G64. Fie $a,b\in\mathbb{N}, a\geq 1, b\geq 1$. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

i) Restul împărțirii lui a la b este egal cu $b-1$ și restul împărțirii lui a la $b+1$ este egal cu b .

ii) Există $k\in\mathbb{N}, k\geq 1$ astfel încât $a=kb(b+1)-1$.

Valeriu V. Bărbieru ,profesor
Șc. Gen. “Al. Ștefulescu”, Tg. Jiu

Problema G65. Se consideră trapezul $ABCD$ ($[AB]$- baza mare) cu $AC\cap BD=\{O\}$ și punctele $P\in(AD)$, $Q\in(BC)$ astfel încât $[OP\cap AB=\{R\}$, $[OQ\cap AB=\{S\}$. Demonstrați că $A_{OPA}=A_{OQB}$ dacă și numai dacă $AR=BS$.

Valeriu V. Bărbieru ,profesor
Șc. Gen. “Al. Ștefulescu”, Tg. Jiu

Problema G66. Să se arate că 37 divide $31^{8n+1}+6$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Marin Chirciu ,profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” ,Pitești

Problema G67. Fie a un număr natural nenul. Demonstrați că fracția $\dfrac{an+a+1}{(a+1)^2+a^2+3a+3}$ este ireductibilă oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Marin Chirciu ,profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” ,Pitești

Problema G68. Demonstrați că $4^{4n+1}>3^{5n+1}$ oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema G69. Arătați că : $2(\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+.....+\sqrt{n(n+1)})\le n^2+2n.$

Amelia Velcea, profesor
Lupeni-Hunedoara

Problema G70. Fie paralelogramul $ABCD$, E şi F pe laturile $[AB]$, respectiv $[AD]$ astfel încât $\dfrac{AD}{FD}=\dfrac{AB}{EB}=k$. Notăm $\{G\}=CE\cap BD$, $\{H\}=CF\cap BD$, $\{P\}=FG\cap BC$ şi $\{Q\}=EH\cap CD$. Arătaţi că $(2k-2)PQ=(2k-1)FE$.

Andrei Răzvan Băleanu, elev
Colegiul Naţional George Coşbuc, Motru

Problema G71. Într-o urnă sunt patru bile pe care este lipit unul din numerele $a_1=\sqrt{7n+3}, a_2=\sqrt{7n+5}, a_3=\sqrt{5n+2}, a_4=\sqrt{5n+3}, n\in\mathbb{N}$. Care este probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o bilă, pe ea să fie lipit un număr rațional?

Stelică Modroiu, profesor
Șc. Gen. Drăguțești

Problema G72. Fie ABC un triunghi echilateral de latură a. Dacă M este un punct interior triunghiului ABC să se arate că $MA+MB+MC<2a$.

Marius Mainea, profesor
Colegiul National ,,Vladimir Streinu" Găești Dâmbovița

Problema G73. Rezolvați ecuația: $\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=3$

Adrian Popescu , profesor Șc. Gen. ”Sf. Nicolae” ,Tg-Jiu
Simona Stoicoiu , profesor Șc. Gen. ”Constantin Săvoiu”, Tg-Jiu

CLASA A VIII-A

Problema G74. Se consideră numerele $a,b,k \in \mathbb{R}; k>1$. Dacă $a+b=1$ și $a^4+b^4=2k^4-1$, demonstrați că $|a-b|=\sqrt{4k^2-3}$.

Valeriu V. Bărbieru – profesor, Șc. Gen. “Al. Ștefulescu”, Tg. Jiu
Cornelia Elena Bărbieru – profesor, C. N. “Tudor Vladimirescu”, Tg. Jiu

Problema G75. Să se arate că 29 divide $41^{8n+1}-12, n \in \mathbb{N}$.

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema G75. Se dă prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ și punctele $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (CC')$ astfel încât $CM=x, CN=y, CP=z$. În condițiile de mai sus, demonstrați că triunghiul MNP este dreptunghic și isoscel dacă și numai dacă $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ sau $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$.

Valeriu V. Bărbieru , profesor
Șc. Gen. “Al. Ștefulescu”, Tg. Jiu

Problema G76. Să se arate că 29 divide $41^{8n+1}-12, n \in \mathbb{N}$.

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema G77. Dacă $x,y,z>0$, demonstrați că:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}\geq\frac{2(x+y)}{x+y+2z}.$$

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema G78. Dacă $a>0, n>0$ atunci: $a^3+\frac{1}{a^3}\geq 2(n+1)-n\left(a+\frac{1}{a}\right)$.

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema G79. Pe planul unui dreptunghi $ABCD$ se ridică perpendiculara DM. Dacă $P=\left\{N \mid N \in [MB], m\left(\widehat{ANC}\right)=90^\circ\right\}$, se cere:

a) Cardinalul mulțimii P.
b) Calculați DN, dacă $AB=2BC=2DM=2a$.

Stelică Modroiu, profesor
Șc. Gen. Drăguțești

Problema G80. Arătați că: $\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}+\frac{3}{3+1}+...+\frac{n}{n+1}\le\frac{n(n+3)}{2}$.

Ionuț Catrina, profesor
C.T. ”Gheorghe Magheru”, Tg-Jiu

Problema G81. De o parte si de alta a planului triunghiului ABC se consideră punctele S și P astfel încât $SA=SB=SC$ și $PA\perp PB\perp PC\perp PA$. Se dă raportul dintre volumele piramidelor $PABC$ și $SABC$ egal cu k.

a)Aflați punctul în care dreapta SP intersectează planul triunghiului.

b) Aflați k când SP intersectează planul triunghiului în centrul de greutate al triunghiului ABC, respectiv centrul cercului celor noua puncte al triunghiului ABC.

(Generalizare a problemei 3 de la a 60 a O.N.M. propusă de Cristian Lazăr)

Andrei Băleanu,elev C.N.”G. Coșbuc” ,Motru
Adrian Popescu , profesor Șc. Gen. ”Sf. Nicolae”, Tg-Jiu

Problema G82. Demonstrați ca daca $x,y\in(-k,k)$ atunci și $\frac{(x+y)}{1+\frac{xy}{k^2}}\in(-k,k)$.

Adrian Popescu , profesor
Șc. Gen. ”Sf. Nicolae”, Tg-Jiu

Problema G83. Se dă expresia $E(n)=\frac{\sqrt{n(n+1)}}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$, n număr natural.

a) Să se aducă E la forma cea mai simplă.

b) Să se calculeze $E(1)+E(2)+...+E(24)$.

c) Cea mai mică valoare a lui n pentru care $E(1)+E(2)+...+E(n)$ este număr natural.

Adrian Popescu , profesor Șc. Gen. ”Sf. Nicolae” ,Tg-Jiu
Popica Adrian, profesor L.T. Novaci

CLASA A IX-A

Problema L37. Fie x, y şi z numere reale pozitive astfel încât $x+y+z=1$. Arătaţi că: $\frac{3}{2}\le\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\le\frac{2z-x}{2x}+\frac{2x-y}{2y}+\frac{2y-z}{2z}$.

Andrei Răzvan Băleanu, elev
Colegiul Naţional ”George Coşbuc”, Motru

Problema L38. Arătați că:

$$\left(8n^2-20n+7\right)\cdot 5^n+25 \ \vdots\ 32, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema L39. Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale pozitive sistemul:

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}+\frac{1}{zc}\right)=1\\ x+2y^2+3z^3=102\end{cases}$$

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema L40. Dacă $x, y, z > a > 0$ și $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{a}$ arătați că :

$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-a}+\sqrt{y-a}+\sqrt{z-a}$.

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema L41. a) Să se arate că mulțimea

$A=\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^m+x^n+9}{3x^2} \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}, m \geq 2, n \geq 2\right\}$ are cardinal finit.

b) Este adevărată propoziția $p: cardA=1 \Leftrightarrow m+n$ este impar.

Justin Paralescu, profesor C.N. ”Ecaterina Teodoroiu”, Tg-Jiu
Valeriu Drulă , profesor C.N. ”George Coșbuc”, Motru

Problema L42. Să se demonstreze că:

a) Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ avem inegalitatea

$$\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{3}}+\sqrt{b^2+c^2-bc\sqrt{3}} \geq \sqrt{a^2+c^2-ac} .$$

b) inegalitatea de mai sus devine egalitate dacă și numai dacă $\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$.

Petre Ciungu, profesor
C.C. ”Virgil Madgearu”, Tg-Jiu

Problema L43. Determinați $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât: $\frac{x^2}{3}+\frac{(y+3)^2}{x+y}=2\sqrt{xy}+3$.

Mihai Bunget, profesor
C.N. ”Tudor Vladimirescu”, Tg-Jiu

Problema L44. Rezolvați ecuația: $\left(3x^2-4x+1\right)\left(3x^2+5x+1\right)=9x^2$.

Petre Ciungu, profesor
C.C. ”Virgil Madgearu”, Tg-Jiu

Problema L45. Fie f, g două funcții de gradul al doilea diferite, având coeficienții termenilor de gradul ala doilea egali cu 1. Știind că:

$f(m)+f(n)+f(p)=g(m)+g(n)+g(p)$, unde $m,n,p\in\mathbb{N}^*$, numere naturale date, să se rezolve ecuația $f(x)=g(x)$.

Petre Ciungu, profesor
C.C. ”Virgil Madgearu”, Tg-Jiu

Problema L46. Arătați că oricare ar fi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos(\alpha-\beta)\le 2\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\beta}\ .$$

Alin Băcilă, profesor
C.N. ”George Coșbuc”, Motru

Problema L47. Dacă $a_1+a_2+...+a_n=1$, cu $a_i>0, i=\overline{1,n}$, arătați că:

$$\sqrt{1+a_1}+\sqrt{2+a_2}+\sqrt{3+a_3}+...+\sqrt{n+a_n}\le\frac{(n+1)(n+2)}{4}\ .$$

Ionuț Catrina, profesor
C.T. ”Gheorghe Magheru”, Tg-Jiu

Problema L48. Fie $a,b,c>0.$ Arătați că :

$$\frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}+a+b+c\ge 4\sqrt[4]{abc}\ .$$ (Inegalitatea Claudiu Mândilă)

Marius Mainea, profesor
Colegiul National ,,Vladimir Streinu", Găești Dâmbovița

Problema L49. Tetraedrul $MNPQ$ are vârfurile pe muchiile tetraedrului regulat $ABCD$ de lungime 1 , si are cinci muchii de lungime $\frac{1}{2}$ .Demonstrați :

1) M,N,P,Q sunt mijloace de muchii.
2) $V_{MNPQ}=\frac{1}{8}V_{ABCD}$

Marius Mainea, profesor
Colegiul National ,,Vladimir Streinu", Găești, Dâmbovița

Problema L50. Daca a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi , atunci:

$$\frac{ab}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}+\frac{bc}{\sqrt{(b^2+a^2)(c^2+a^2)}}+\frac{ac}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+b^2)}}>1$$

Marius Mainea, profesor
Colegiul National ,,Vladimir Streinu", Găești, Dâmbovița

CLASA A X-A

Problema L51. Să se determine $x \in \mathbb{N}$ astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$\frac{16^x + 818x + 1}{4^x + x} = 4^x - 1.$$

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema L52. Să se rezolve ecuația: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{18}\right)^x - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{18}\right)^x = 2$.

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema L53. Fie $a > 1, b > 1, m > 0, n > 0$ numere reale fixate . rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația :

$$m \cdot x^{\log_a(x-b)} + n \cdot (x-b)^{\log_a x} = (m+n) \cdot x.$$

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema L54. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$2^x + 3^{2x} + 4^{3x} + \ldots + (n+1)^{nx} + n = 2\left(2^{\frac{x}{2}} + 3^x + 4^{\frac{3x}{2}} + \ldots + (n+1)^{\frac{nx}{2}}\right).$$

Alin Băcilă, profesor C.N. ”George Coșbuc”, Motru
Valeriu Drulă , profesor C.N. ”George Coșbuc”, Motru

Problema L55. Comparați numerele a și b care se verifică relațiile: $a + b = 1$ și $\log_3(a+2) = 2^b$.

Valeriu Drulă , profesor C.N. ”George Coșbuc”, Motru
Ion Sanda, profesor Șc. Gen. Nr. 2, Motru

Problema L56. Să se arte că $a^{\frac{a^2+ab}{(a+2b)^2}} \cdot b^{\frac{3ab+4b^2}{(a+2b)^2}} \geq \frac{(a+2b)^2}{4a+5b}, \forall a, b > 0$.

Mihai Bunget, profesor
C.N. ”Tudor Vladimirescu”, Tg-Jiu

CLASA A XI-A

Problema L57. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_0 = 2$ și $x_1 = 3$. Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ știind că $(4x_{n+2} - 12x_{n+1} + 8x_n)n^2 + n(8x_{n+2} - 36x_{n+1} + 32x_n) + 3x_{n+2} - 15x_{n+1} + 30x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Sorin Ulmeanu , profesor
C.N. ”I.C. Brătianu” , Pitești

Problema L58. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.Rezolvaţi ecuaţia $X^n = A\cdot X^n \cdot A$, $X\in M_3(\mathbb{C}), n\geq 1$ natural.

Emil Pătrăşcoiu, profesor,
C.N. „Ecaterina Teodoroiu” Tg-Jiu

Problema L59. Fie şirul $a_n=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n} k^{\lg x}-(n-1)x}{\lg x}, (\forall) k\in\mathbb{N}, n\geq 2.$ Fără a folosi regula lui l' Hôspital , să se determine a_n şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n!}$.

Ion Gheorghiu, profesor
C.C. ,”Virgil Madgearu'', Tg-Jiu

Problema L60. Fie $b,c\in\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $b<c$ și $x_0\in\mathbb{R}_+$. Definim șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de relația $x_{n+1}=\dfrac{x_n+b}{x_n+c}$, cu x_0 dat. Arătați că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și calculați limita sa.

Alin Băcilă, profesor C.N. ”George Coșbuc”, Motru
Valeriu Drulă , profesor C.N. ”George Coșbuc”, Motru

Problema L61. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6\end{pmatrix}$. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $tr\left(A^n\right)=12^n-12$.

Mihai Bunget, profesor
C.N. ”Tudor Vladimirescu”, Tg-Jiu

Problema L62. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{(n+a)^2+1}\right\}$, unde $a\in\mathbb{N}$ este dat, iar $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x.

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema L63. Fie $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$ și $m\in\mathbb{R}$. Calculați:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[k]{x^k+mx^{k-1}+1}+\sqrt[k]{x^k-mx^{k-1}+1}-2x\right).$$

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema L64. Calculați $A^n, n\in\mathbb{N}^*$, unde $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ -1 & a & 0\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix}, a\in\mathbb{C}$.

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Pitești

Problema L65. Demonstraţi că pentru orice $x \in [1, \infty)$ are loc inegalitatea:

$$\ln x \geq arctg \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

Marin Chirciu , profesor
Colegiul ”Zinca Golescu” , Piteşti

Problema L66. Fie $f(x) = 2010^{\sin x - \cos x}$. Să se arate că ecuaţia $f(x) = tgx$ are cel puţin o soluţie în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Petre Ciungu, profesor
C.C. ”Virgil Madgearu”, Tg-Jiu

Problema L67. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{4k}{4k^2 - 1} \cdot \sin\frac{2}{4k^2 - 1}$.

Alin Băcilă, profesor C.N. ”George Coşbuc”, Motru
Valeriu Drulă , profesor C.N. ”George Coşbuc”, Motru

CLASA A XII-A

Problema L69. Demonstraţi că

$$\lim_{n\to\infty} 4n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n^2 + (2k-1)^2} = \lim_{n\to\infty} n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^4 + (n+1)^2 \cdot (k-1)^2}.$$

Emil Pătrăşcoiu, profesor,
C.N. ”Ecaterina Teodoroiu” Tg-Jiu

Problema L70. Stabiliţi semnul numărului real $\mathrm{I} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin kx}{x} dx, k \in \mathbb{N}^*$ număr par.

Emil Pătrăşcoiu, profesor,
C.N. ”Ecaterina Teodoroiu” Tg-Jiu

Problema L71. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathrm{R}, f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}{1 + x^n}$. Să se arate că:

a) $\frac{1}{e} < \int_0^{\frac{1}{e}} f(x)dx < \frac{1}{e-1}$;

b) $\int_e^{e+1} f(x)dx = \ln\frac{e^2}{e-1}$.

Ion Gheorghiu, profesor
C.C. ,”Virgil Madgearu’’, Tg-Jiu

Problema L72. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{1\le i<j\le n}\left(\cos\frac{i+j}{n}+\cos\frac{i-j}{n}\right)$.

Cristi Antonie, profesor
C.N. " Ecaterina Teodoroiu", Tg-Jiu

Problema L73. Să se calculeze $\int_0^a \frac{1}{1+b^{2x-a}}dx$, unde $a,b\in(0,\infty)$.

(În legătură cu problema 25432 din G.M. 11/2005)
Marin Chirciu , profesor
Colegiul "Zinca Golescu" , Pitești

Problema L74. Determinați primitivele funcției

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^4+2x^3-x^2-2x+a},x\in I,$$

unde $a\in\mathbb{R}$ și I este un interval pe care nu se anulează numitorul.

Marin Chirciu , profesor
Colegiul "Zinca Golescu" , Pitești

Problema L75. Determinați primitivele funcției:
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x(x-a)(x-2a)}{x^4-4ax^3+8a^3x+4a^4+1}$, unde $a\in\mathbb{R}$ este dat.

Marin Chirciu ,profesor
Colegiul "Zinca Golescu" ,Pitești

Problema L76. Să se calculeze $\int x\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{x(x^2+e^{x^2})}dx, x>0$.

Petre Ciungu, profesor
C.C. "Virgil Madgearu", Tg-Jiu

Problema L77. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)\cdot\ldots\cdot(x^2+x+n)}dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Mihai Bunget, profesor
C.N. "Tudor Vladimirescu", Tg-Jiu

Problema L78. Determinați primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{2xe^{x^2}(x^2+2)+e^{x^2+x}(x+1)+e^x(e^x+2)}{(e^{x^2}+e^x+1)^n},$$ unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Petre Ciungu, profesor
C.C. "Virgil Madgearu", Tg-Jiu

Concursul revistei

Începând cu acest număr se organizează Concursul anual al rezolvitorilor revistei. Regulamentul concursului este următorul:

- fiecare elev poate trimite soluţii la problemele destinate clasei pe care o frecventează în anul şcolar respectiv;
- fiecare soluţie se redactează împreună cu numărul şi enunţul problemei, numele rezolvitorului şi şcoala de la care provine;
- soluţiile vor fi trimise pe adresa: Strada Grivița (Geneva) nr.18 Tg-Jiu, Gorj cu menţiunea “pentru concursul revistei de matematică” sau prin mail la adresa bungetmihai@yahoo.com;
- fiecare soluţie se notează de la 1 la 10;
- clasamentul final al rezolvitorilor revistei se va realiza cumulând punctajele obţinute în urma rezolvării problemelor din toate numerele revistei apărute în decursul unui an şcolar;
- elevii clasaţi pe primele locuri la fiecare clasă vor fi invitaţi la faza finală a concursului, ce se va desfăşura la Colegiul Naţional “Tudor Vladimirescu” la sfârşitul anului şcolar. Punctajul obţinut la faza finală va avea pondere de 50% în stabilirea clasamentului final;
- elevii vor fi premiaţi cu premii în bani, obiecte şi diplome;
- de asemenea vor fi premiaţi şi propunătorii celor mai interesante şi originale probleme;

Urăm succes tuturor participanţilor!