Dinamica fluidelor

Relația lui Bernoulli

Această relație se obține efectuând integrarea ecuațiilor de mişcare a fluidelor ideale pe o linie de curent.

Se porneşte de la sistemul de ecuații de mişcare ala fluidelor ideale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=X \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=Y \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=Z \end{cases}$$

Se pun următoarele trei condiții:

1.Mişcarea este permanentă:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0$$

2.Mişcarea se efectuează pe o linie de curent:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$$

3.Pentru a exprima membrul drept al fiecărei ecuații sub forma unei derivate, în scopul integrării sistemului de ecuații, se pune condiția ca forțele masice să derive dintr-un potențial.

$$\overline{f_m}=-gradU$$

$$\overline{f_m}=-gradU \quad \Rightarrow \quad X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} X = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ Y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ Z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Prin înmulțirea ecuațiilor cu dx,dz şi dy se obține sistemul:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + v\dfrac{\partial u}{\partial y}dx + w\dfrac{\partial u}{\partial z}dx + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}dx = -\dfrac{\partial U}{\partial x}dx \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x}dy + v\dfrac{\partial v}{\partial y}dy + w\dfrac{\partial v}{\partial z}dy + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}dy = -\dfrac{\partial U}{\partial y}dy \\ u\dfrac{\partial w}{\partial x}dz + v\dfrac{\partial w}{\partial y}dz + w\dfrac{\partial w}{\partial z}dz + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}dz = -\dfrac{\partial U}{\partial z}dz \end{cases}$$

Prin prelucrarea celei de-a doua condiții se obține sistemul:

$$\begin{cases} u \cdot dy = v \cdot dx \\ u \cdot dz = w \cdot dz \\ v \cdot dz = w \cdot dy \end{cases}$$

şi prin înlocuire în prima ecuație:

$$\Rightarrow \quad u\frac{\partial u}{\partial x}dx + u\frac{\partial u}{\partial y}dy + u\frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx = -\frac{\partial U}{\partial x}dx$$

$$\Rightarrow \quad u\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx = -\frac{\partial U}{\partial x}dx$$

Se înlocuieşte expresia din paranteză cu diferențiala componentei vitezei vectoriale după axa Ox, u.

Se procedează în mod analog cu celelalte ecuații şi rezultă în final sistemul:

$$\Rightarrow \begin{cases} u\cdot du+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}dx=-\dfrac{\partial U}{\partial x}dx \\ v\cdot dv+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}dy=-\dfrac{\partial U}{\partial y}dy \\ w\cdot dw+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}dz=-\dfrac{\partial U}{\partial z}dz \end{cases}$$

Prin adunarea celor trei ecuații membru cu membru se obține:

$$u\cdot du+v\cdot dv+w\cdot dw=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)$$

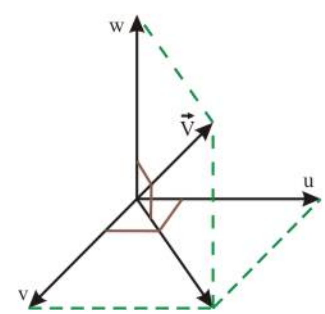
$$d\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{1}{2}2u\cdot du=u\cdot du \qquad d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}(dp)=-du$$

Se înlocuieşte expresia din paranteză funcție de modulul vitezei vectoriale (vezi figura, în care viteza vectorială reprezintă de fapt diagonala paralelipipedului dreptunghic şi deci valoarea ei se obține cu formula corespunzătoare de la geometria în spațiu).

Ca urmare se obține relația în diferențiale care ulterior se integrează:

$$\bar{v}=\bar{v}(u,v,w)$$

$$d\frac{v^2}{2}+\frac{1}{\rho}dp+dU=0$$



- pentru fluide incompresibile $\rho=ct$
- pentru fluide care se află în câmp gravitațional $U=gz$, $\rho\cdot g=\gamma$

$$\frac{v^2}{2}+\frac{1}{\rho}\int dp+gz=ct \Rightarrow \frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=ct \Rightarrow \frac{v^2}{2}\frac{1}{g}+\frac{p}{\rho}\frac{1}{g}+gz\frac{1}{g}=ct$$

$\Rightarrow \dfrac{v^2}{2g}+\dfrac{p}{\rho g}+z=ct$ - relația lui Bernoulli

Între punctele (*1*) şi(*2*) situate pe o linie de curent, se obţine:

$$\rho \cdot g = \gamma\ , \quad \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_{21}}{\gamma} + z_2$$

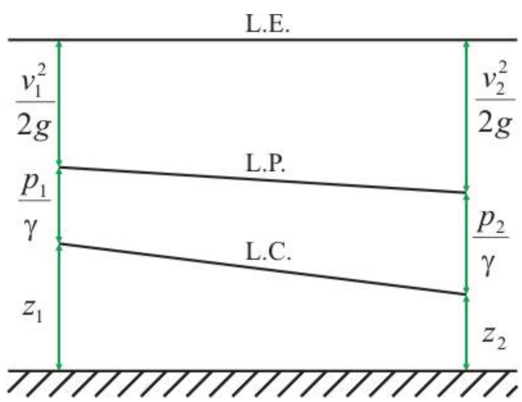
Interpretare energetică şi reprezentarea grafică a relaţiei:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = ct$$

Prin înmulţire cu produsul mg se obţine relaţia energetică:

$$\frac{v^2}{2g} mg + \frac{p}{\rho g} \rho V g + mgz = ct \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{2} + pV + mgz = ct$$

Concluzie: suma dintre energia cinetică, energia de presiune şi energia potenţială a fluidului rămâne constantă (pentru un fluid ideal).



-linia energetică

-linia piezometrică

-linia de curent

În cazul fluidelor uşoare, energia potenţială este neglijabilă, deci termenul ce conţine cota z nu se mai ia în considerare.

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = ct \quad \Rightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = ct$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

Aceasta reprezintă deci relaţia lui Bernoulli pentru fluide uşoare cum sunt aerul sau diverse gaze.

Teorema impulsului şi teorema momentului cinetic

Impulsul unui corp cu masa m şi viteza vectorială v este $m\cdot\bar{v}$, iar momentul cinetic corespunzător este $\bar{r}\times m\cdot\bar{v}$.

Impulsul total al unui sistem de corpuri este:

$$H=\sum m\cdot\bar{v}$$

iar momentul cinetic total:

$$K=\sum\bar{r}\times m\cdot\bar{v}$$

Teorema impulsului se scrie sub forma:

$$\frac{dH}{dt}=\sum\overline{F_e}\,;\quad \frac{d}{dt}\left(\sum m\cdot\bar{v}\right)=\sum\overline{F_e}$$

Derivata în raport cu timpul a impulsului total este egală cu suma forțelor exterioare care acționează asupra sistemului de corpuri.

Teorema momentului cinetic se scrie sub forma:

$$\frac{dK}{dt}=\sum\overline{M_e}\,;\quad \frac{d}{dt}\left(\sum\bar{r}\times m\cdot\bar{v}\right)=\sum\overline{M_e}$$

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total este egală cu suma momentelor forțelor exterioare care acționează asupra sistemului de corpuri.

Pentru a obține expresiile acestor teoreme în cazul curgerii fluidelor se procedează în mod analog pentru un volum de fluid format din particule de masă elementară *dm*.

Impulsul unei particule fluide este $dm\cdot\bar{v}$.

- pentru $\rho=ct \Rightarrow$ impulsul este: $\rho dV\cdot\bar{v}=\rho\cdot\bar{v}dV$

Momentul cinetic al unei particule fluide este:

$$\bar{r}\times dm\cdot\bar{v}=\bar{r}\times\rho\bar{v}\cdot dV$$

Prin analogie cu formulele din mecanica clasică prezentate anterior şi valabile pentru sisteme de corpuri solide se deduc formulele valabile pentru fluide.

Impulsul total al întregului volum de fluid este:

$$\int_V \rho \overline{v} dV$$

Teorema impulsului devine:

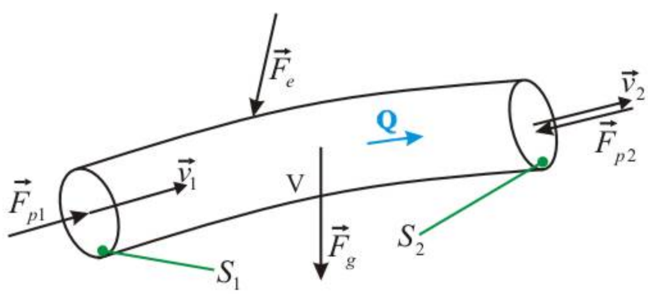
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \overline{v} dV = \sum \overline{F_e}$$

Teorema momentului cinetic devine:

$$\frac{d}{dt}\int_V \overline{r} \times \rho \overline{v} dV = \sum \overline{M_e}$$

Pentru a efectua integralele de volum se va considera curgerea unui fluid cu densitatea constantă şi se va apela la noţiunea de tub de curent elementar pentru care şi viteza iese în faţa integralei deoarece în cazul tubului de curent elementar devine o mărime constantă în orice punct din secţiunea transversală pe direcţia de curgere.

Teorema impulsului şi teorema momentului cinetic pentru tubul de curent elementar



$$\rho Q(\overline{v_2} - \overline{v_1}) = \overline{F_{p1}} + \overline{F_{p2}} + \overline{F_g} + \overline{F_e}$$

Variaţia forţelor de impuls este egală cu suma forţelor exterioare ce acţionează asupra volumului de fluid *V*.

$\overline{v_2}$ şi $\overline{v_1}$ - reprezintă viteza de ieşire, respectiv intrare în volumul *V* de fluid de control.

$\overline{F_{p1}}$ şi $\overline{F_{p2}}$ - forţele cu care fluidul îndepărtat acţionează asupra fluidului din volumul *V*.

$\overline{F_g}$ - forţa de greutate a fluidului considerat.

$\overline{F_e}$ - forța cu care pereții solizi acționează asupra fluidului din volumul V.

Se poate face înlocuirea:

$\overline{F_e} = -\overline{R}$ (R este forța cu care fluidul acționează asupra pereților)

Teorema momentului cinetic se obține prin înmulțirea cu vectorul de poziție corespunzător a fiecărui termen din teorema impulsului:

$$\rho Q\left(\overline{r_2} \times \overline{v_2} - \overline{r_1} \times \overline{v_1}\right) = \overline{r_{p1}} \times \overline{F_{p1}} + \overline{r_{p2}} \times \overline{F_{p2}} + \overline{r_g} \times \overline{F_g} + \overline{r_e} \times \overline{F_e}$$

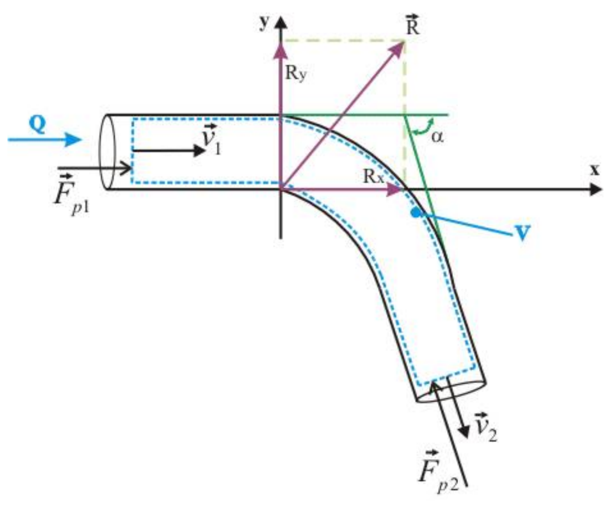
Din teorema impulsului se deduce modulul forței F_e sau a lui $R`$ şi din teorema momentului cinetic se determină vectorul de poziție r_e.

Cunoscând modulul forței şi punctul său de aplicație, problema se consideră rezolvată.

EXEMPLE PRACTICE:

Acțiunea apei asupra unui cot de conductă

Se consideră un cot de conductă de unghi α situat în plan orizontal prin care trece debitul de apă Q, la presiunea constantă p (fluid ideal).



- greutatea $\overline{F_g}$ se neglijează (este perpendiculară pe tablă)

Dacă sensul vectorilor coincide cu sensul axelor, atunci vectorii îşi mențin acelaşi semn în teorema impulsului.

„Se proiectează" teorema impulsului pe axe şi rezultă:

$$\begin{cases} \rho Q(v_2\cos\alpha - v_1) = \overline{F_{p1}} - \overline{F_{p2}}\cos\alpha - R_x & :Ox \\ \rho Q(-v_2\sin\alpha) = \overline{F_{p2}}\sin\alpha - R_y & :Oy \end{cases}$$

Deoarece cotul este în plan orizontal şi are secțiunea transversală constantă, atunci $V = \frac{Q}{S} = ct$; dacă $\left.\begin{matrix} z = ct \\ v = ct \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad p = ct \;\Rightarrow\; v_2 = v_1 = v \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \qquad p_1 = p_2 = p$$

$$Q = v \cdot S; \quad F_p = p \cdot S$$

$$\Rightarrow \qquad R_x = \rho Qv(1-\cos\alpha) + F_p(1-\cos\alpha) = (\rho Qv + F_p)(1-\cos\alpha)$$

$$= (\rho v^2 S + pS)(1-\cos\alpha) \quad > 0$$

$$R_y = \rho Qv\sin\alpha + F_p\sin\alpha = (\rho v^2 S + pS)\sin\alpha \quad > 0 \qquad \Rightarrow$$

Forța de impuls cu care apa acționează asupra cotului de conductă este:

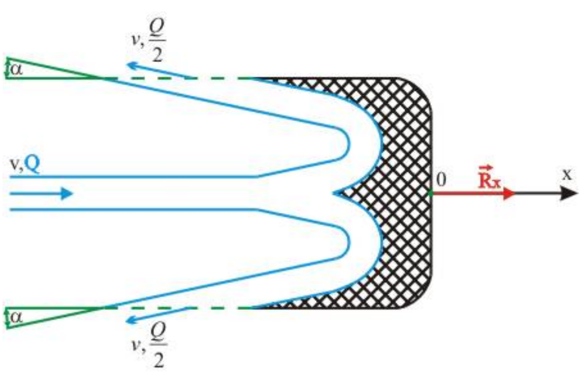
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

În cazul unor valori mari ale parametrilor de curgere, debit şi presiune, această forță poate atinge valori foarte mari, de ordinul tonelor forță şi ca urmare trebuie luate măsuri practice pentru stabilitatea instalației, de exemplu ancorarea corespunzătoare a cotului de conductă.

Influența formai suprafeței corpurilor fată de recepționarea forței de impuls

Forța de impulsinițială a curentului de apă este: $F = \rho Qv$

1.Forțta de impuls recepționată este maximă (aproape dublă) în cazul cupei de turbină Pelton, când avem interesul de a capta cât mai multă energie:



$$\rho Q(\overline{v_2} - \overline{v_1}) = -\overline{R}$$

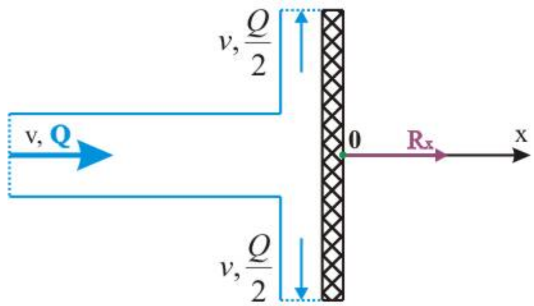
$$\overline{R} = \rho Q(\overline{v_1} - \overline{v_2})$$

$$R_x = \rho\left[Qv - 2\frac{Q}{2}(-v\cos\alpha)\right]$$

$$= \rho Qv(1+\cos\alpha)$$

Situația ideală ar corespunde cazului $\alpha \to 0,\ \cos\alpha \to 1 \;\Rightarrow\; R_x \to 2\rho Qv$

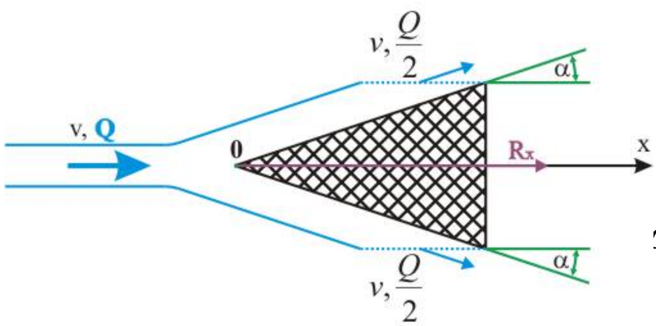
2.Forța de impuls recepționată este constantă în cazul plăcii plane verticale:



$$\rho Q(\overline{v_2}-\overline{v_1})=-\overline{R}$$
$$R_x=\rho(Qv-0)=\rho Qv$$

Suprafața plană captează doar forța de impuls inițială a unui jetului.

3.Forța de impuls recepționată este minimă în cazul corpurilor cu forma frontală ascuțită (vârful avioanelor de vânătoare, al avionului supersonic Concorde, al vapoarelor, al maşinilor de curse):



$$R_x=\rho\left(Qv-2\frac{Q}{2}v\cos\alpha\right)$$
$$=\rho Qv(1-\cos\alpha)$$
$$\alpha\to 0 \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha\to 1 \quad\Rightarrow\quad R_x\to 0$$