PROPRIETĂȚILE FUNCȚIILOR DERIVABILE PE UN INTERVAL

1. Puncte de extrem ale unei funcții

Determinarea punctelor de extrem ale unei funcții are o mare importanță practică,
fiind legată de rezolvarea problemelor de optimizări (realizarea profitului maxim în condiții date, minimizarea consumurilor şi a pierderilor, etc).

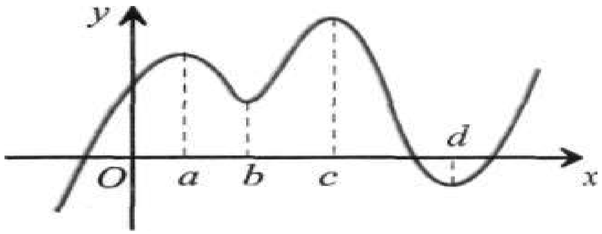
Definiție

Fie f : $D \rightarrow$ R şi $x_0 \in D$

- Spunem că x_0 este ***punct de maxim relativ*** sau ***maxim local*** pentru funcția f dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap D$.(*în x_0 ,funcția f are* **cea mai mare valoare**)
- Spunem că x_0 este ***punct de minim relativ*** sau ***minim local*** pentru funcția f dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap D$.(*în x_0 ,funcția f are* **cea mai mică valoare**)
- Spunem că x_0 este ***punct de extrem relativ*** sau ***extrem local*** dacă este punct de **maxim** sau **minim** relativ.

Exemplu.

în *figură*, punctele *a* şi *c* sunt puncte de maxim local iar punctele *d* şi *b* sunt puncte de minim local.



Extremele definite mai sus se numesc *extreme relative* sau *locale* spre a le deosebi de ***extremele absolute* sau *globale***.

Definiție

- Spunem că x_0 este ***punct de maxim absolut*** sau ***maxim global*** pentru funcția *f:D→R* dacă $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in D$.
  în acest caz, *$f(x_0)$ reprezintă* valoarea maximă a fu $f(x_0) = \max\limits_{x \in D} f(x)$
- Spunem că x_0 este ***punct de minim absolut*** sau ***minim global*** pent[...] că $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in D$.
  în acest caz, $f(x_0)$ reprezintă valoarea minimă a funcției si se notează $f(x_0) = \min\limits_{x \in D} f(x)$

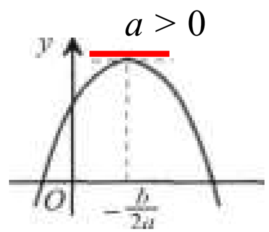
în continuare, pentru simplitate, când ne vom referi la punctele de maxim sau minim relativ, vom omite cuvântul *relativ*. Dacă x_0 este un punct de minim (de maxim) al funcției, punctul de abscisă x_0 este numit punct de minim (de maxim) al graficului

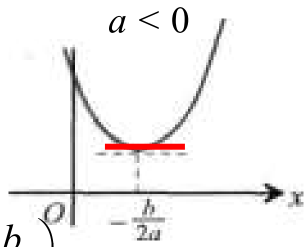
2. **Teorema lui *Fermat***

Pierre Fermat (1601-1665), matematician francez.
Preocupările sale au avut o arie foarte largă. în domeniul teoriei numerelor,
Marea teoremă a lui Fermat a fost enunțată de el şi demonstrată trei secole mai târziu.
A fost printre precursorii analizei matematice şi ai calculului probabilităților.

Exemple preg

Fie funcția f:R→R, $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a \neq 0$.
Ştim că graficul este o parabolă având vârful de abscisă $\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$.





Vârful corespunde unui punct de extrem (maxim sau minim după cum $a < 0$ sau $a > 0$).

Lectura graficului sugerează faptul că **tangenta la grafic în vârf este orizontală**.
Verificăm acest lucru prin calcul. într-adevăr, $f'(x) = 2ax + b$, deci panta tangentei la grafic în vârf este $f'\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$

Teorema lui *Fermat*

Fie f: I→R o funcție derivabilă pe intervalul I.
Dacă **a este un punct de extrem** din interiorul intervalul $\boxed{}$ ***f '(a)* = 0**.

Demonstrație.

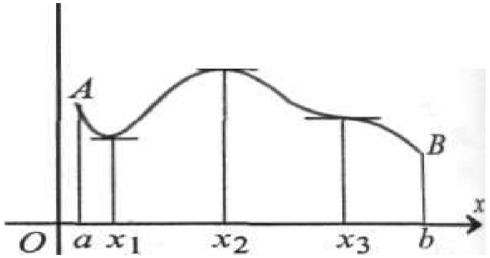
Fie *a*, un punct de **maxim** relativ şi *V* o vecinătate a lui *a* astfel încât *f(x)* ≤ *f(a), pentru orice x.*
Atunci: $f_s'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$, $f_d'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$

Funcția f fiind derivabilă, avem $f'_s(a) = f'_d(a) = 0$ de unde rezultă concluzia.
Cazul când *a* este punct de minim este analog.

Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat

Dacă f: I→R este o funcție derivabilă, **în orice punct de extrem** ,diferit de extremitățile graficului, **tangenta la grafic este orizontală**. *în figură*, avem graficul unei funcții deri-vabile definite pe *[a,b]*.

Punctul $\mathbf{x_1}$ este un punct de minim iar $\mathbf{x_2}$ este un punct de maxim din interiorul lui *[a,b]*.
Tangentele la grafic în punctele de abscise x_1 şi x_2 sunt orizontale.



Observații.

1. Teorema lui *Fermat* afirmă că dacă o funcție este derivabilă pe un interval I, atunci punctele de extrem din interiorul intervalului I se află printre punctele critice.
2. Concluzia teoremei lui *Fermat* rămâne valabilă, (cu aceeaşi demonstrație), dacă în locul condiției ca f să fie derivabilă pe I punem condiția ca f să fie derivabilă doar în punctul de extrem considerat.
3. **Reciproca** teoremei lui *Fermat* **nu este adevărată**, adică din faptul că derivata într-un punct este nulă nu rezultă neapărat că acesta este punct de extrem.

Exemplu. Pentru funcția f:R→R, $f(x) = x^3$, originea este punct critic dar nu este punct de extrem. Observați şi graficul *din figura* 14: în punctul de abscisă x_3, tangenta la grafic este paralelă cu *Ox,* dar x_3, nu este punct de extrem.

4. Dacă un punct de extrem este situat la un capăt al intervalului I , nu rezultă neapărat că derivata în acest punct este nulă.

Exemple.

• Pentru funcția strict crescătoare f: [2,5] ->R, $f(x) = 3x - 1$, minimul se atinge în 2 iar maximul în 5, dar derivata nu se anulează în nici un punct.

• *în figură*, punctele $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$ sunt puncte de extrem ale graficului dar tangentele la grafic în aceste puncte nu sunt orizontale.

5. Pot exista puncte de extrem în care funcția nu este derivabilă.

Exemplu. Pentru funcția f:R→R, $f(x) = |x|$, originea este punct de minim, dar f nu este derivabilă în origine.

3. Teorema lui *Rolle*

Matematicianul francez *Michel Rolle* (1652-1719),preocupat de problematica rezolvării de ecuații a această teoremă probabil pe baza interpretării geometrice, enunțând-o în 1691, fără demonstrație.

Teoremă:

Fie f: [a, b] →R. Dacă
a) f este ***continuă*** pe *[a, b],*
b) f este ***derivabilă*** pe *(a, b)*
c) ***f(a) = f(b),***

atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $\boxed{f'(c) = 0.}$

(derivata are cel puțin o rădăcină în interval)

Observație.

O funcție f : [a, b] →R, continuă pe [a, b] şi derivabilă pe (a, b) se numeşte funcție *Rolle* pe [a, b], unde *a, b* ∈R, a < *b.*

Interpretarea geometrică a teoremei lui Rolle

Interpretarea geometrică este cea din *fig.* 17. Punctul *c* a cărui existența rezultă din teorema lui *Rolle* este numit în aplicații, punct *intermediar*. Acest punct nu este neapărat unic, așa cum se poate observa din figura alăturată.

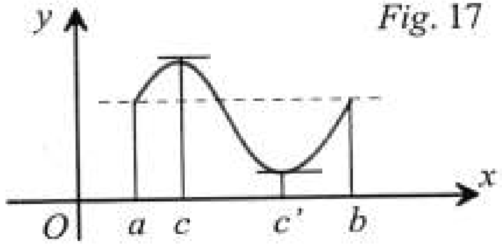


Fig. 17

Consecințe ale teoremei lui Rolle

Fie f: I → R, o funcție derivabilă pe un interval I.
Două rădăcini ale funcției (adică ale ecuației $f(x) = 0$) sunt numite ***rădăcini consecutive***, dacă între ele nu se află nici o altă rădăcină.

Consecința 1. **între două rădăcini ale funcției există cel puțin o rădăcină a derivatei.**
Consecința 2. între două rădăcini consecutive ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcției.

Probleme rezolvate.

1. Demonstrați că în intervalul (0, 1) se găseşte o singură rădăcină a ecuației: $\boldsymbol{4x^3 - 6x^2 + 1 = 0}$.

Soluție.

Notăm $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$. Cum f(0) = 1 >0 şi f(l) = -1 <0, folosind proprietatea valorilor intermediare, rezultă că între 0 şi 1 există cel puțin o rădăcină. Dar $f\,'(x)=12x^2 -12x$ are rădăcinile 0 şi 1 şi aplicând a doua consecință a teoremei lui *Rolle,* rezultă unicitatea.

2. Dacă f:[-l, 1]→R, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x \quad , x \in [-1,0) \\ mx^2 + nx + p, x \in (0,1] \end{cases}$

aflați valorile lui *m, n, p* astfel încât funcția să îndeplinească condițiile teoremei lui *Rolle.* Aflați valoarea punctului intermediar.

Soluție.

Din condiția ca f să fie continuă, găsim $p = 0$, iar din condiția ca f să fie derivabilă, $n = -3$. Relația f(l) =f(-1), implică $m = 7$.
Punctul intermediar este $c = \frac{3}{14}$

3. Fie funcția f : R->R, $f(x) = x^3 -3x$. Aflați punctele de extrem.

Soluție.

Deoarece f este derivabilă pe R, căutăm punctele de extrem printre punctele critice.
$f\,'(x) = 3(x^2 -1)$ deci punctele critice sunt 1 şi -1.
Cercetăm, cu ajutorul definiției, dacă acestea sunt puncte de extrem.
Avem $f(x) - f(1) = x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)^2$, de unde rezultă că pentru orice x din vecinătatea (-2, ∞) a lui 1 are loc relația $f(x)$ >f(l), adică 1 este punct de minim relativ.
Analog, din $f(x) - f(-1) = x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x + 1)^2$, rezultă că pentru orice x din vecinătatea (-∞, 2) a lui -l avem $f(x) < f(-1)$, deci -l este punct de maxim relativ.

◆ EXERCIȚII DE INIȚIERE ◆

1. În figura alăturată este reprezentat graficul unei funcții $f:[1,6]\to\mathbf{R}$. Precizați punctele de extrem relativ și punctele de extrem absolut ale funcției. Cât este $\max\limits_{x\in[1,6]} f(x)$? Dar $\min\limits_{x\in[1,6]} f(x)$?

2. Folosind reprezentările grafice, aflați punctele de extrem ale funcțiilor:

a) $f_1:[-1,2]\to\mathbf{R},\ f_1(x)=|x|$;

b) $f_2:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R},\ f_2(x)=\cos x$;

c) $f_3:[0,4]\to\mathbf{R},\ f_3(x)=4x-x^2$;

d) $f_4:[0,2\pi]\to\mathbf{R},\ f_4(x)=|\sin x|$;

e) $f_5:[-1,1]\to\mathbf{R},\ f_5(x)=\max(x,x^2)$.

3. Aflați:

$\max\limits_{x\in\mathbf{R}}(\sin x)$, $\min\limits_{x\in\mathbf{R}}(\cos x)$, $\max\limits_{x\in\mathbf{R}}(-x^2+6x-1)$, $\min\limits_{x\in\mathbf{R}}(2x^2-10x)$,

$\max\limits_{x\in[1,3]}(2x+5)$, $\min\limits_{x\in[1,3]}(2x+5)$, $\max\limits_{x\in[0,4]}(-2x+5)$, $\max\limits_{x\in[0,4]}(-2x+5)$

PROBLEME ◆ PROBLEME ◆ PROBLEME

1. Aflați punctele critice și punctele de extrem (dacă există), pentru funcțiile
$$f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^4 \text{ și } g(x)=x^5.$$

2. Aflați punctele critice ale funcțiilor:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^5-80x$;
b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$;
c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(x-1)e^x$;
d) $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=x\ln x$;
e) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\sin^2 x$;
f) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x^2$.

3. Care sunt punctele de extrem ale funcției $f:[0,2\pi]\to\mathbf{R},\ f(x)=\sin x$? În care dintre aceste puncte se anulează derivata ? Aceeași problemă pentru funcția
$$g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R},\ g(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\\ \cos x, & x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}.$$

4. Reprezentați grafic funcția $f:[-2,2]\to\mathbf{R},\ f(x)=|x^2-1|$. Care sunt punctele de extrem ? Care dintre aceste puncte îndeplinesc condițiile din teorema lui *Fermat* ?

5. Stabiliți dacă se poate aplica teorema lui *Rolle* funcțiilor de mai jos. Justificați răspunsurile.

a) $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R},\ f(x)=\max(\sin x,\cos x)$;
b) $f:[0,1]\to\mathbf{R},\ f(x)=|x-1|^3$;
c) $f:[0,2]\to\mathbf{R},\ f(x)=|x-1|^2$;
d) $f:[-1,1]\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2|x|$.

6. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^3-x+2$. Aflați numărul real $a>0$ astfel încât să se poată aplica teorema lui *Rolle* pe intervalul $[0,a]$. Aflați valoarea punctului intermediar.

7. Fie funcția $f:[1,a]\to\mathbf{R},\ (a>3),\ f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}+b, & x\in[1,3]\\ c(x^2-8x+15), & x\in(3,a]\end{cases}$. Aflați valorile lui a, b, c astfel încât f să îndeplinească condițiile teoremei lui *Rolle* pe $[1,a]$.

8. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-2006)$. Câte rădăcini reale are ecuația $f'(x)=0$?

9. Demonstrați că ecuația $x^4-4x+2=0$ are o soluție în intervalul $(0,1)$ și o soluție în intervalul $(1,2)$. Arătați că acestea sunt singurele rădăcini reale ale ecuației date.

10. Demonstrați că în intervalul $(-1,0)$ există o soluție reală a ecuației $x^3+3x+1=0$. Arătați că aceasta este singura rădăcină reală a ecuației date.

4. Teorema lui *Lagrange*

***Joseph Louis Lagrange* 1736-1813**

Teorema lui *Lagrange* (**teorema de *medie*** sau **teorema *creşterilor finite***) este unul dintre cele mai importante rezultate din analiza matematică.

Teorema lui *Lagrange*

Dacă f: **[a, b]→R** este

a) funcție **continuă** pe *[a, b]*

b) funcție **derivabilă** pe *(a, b),* atunci **există *c*** $\in$ *(a, b)* astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Demonstrație.

Fie *h* : *[a, b]* → R, h(x) =*f(x)* -λx şi impunem ca h să îndeplinească condițiile teoremei lui *Rolle.*

Evident, *h* este continuă pe *[a, b]* şi derivabilă pe *(a, b)*. Punând condiția *h(a)* = *h(b),* găsim: $\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Din teorema lui *Rolle,* rezultă că există c $\in$(a, b) astfel încât h'(c) = 0, de unde $\lambda = f'(c)$ şi ținând seama de expresia lui λ, rezultă concluzia.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

din teorema lui *Lagrange* se numeşte ***prima formulă a creşterilor finite***.

Punctul *c* din formula creşterilor finite este numit în aplicații punct *intermediar.*

Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange

Dacă notăm $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, atunci $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ reprezintă panta dreptei AB iar $f'(c)$ reprezintă panta tangentei la grafic în punctul $C(c, f(c))$. Astfel, concluzia teoremei lui *Lagrange* se exprimă geometric prin existența unui punct (cel puțin) în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care unește capetele graficului.

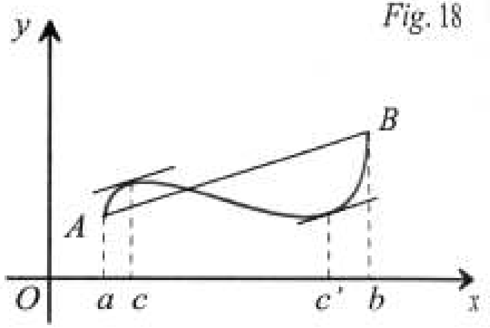


Fig. 18

Punctul *c* nu este neapărat unic ! Vezi *figura* 18.

Consecințe *ale teoremei lui Lagrange*

1. Dacă **derivata** unei funcții **este nulă** pe un interval, atunci **funcția este constantă** pe acel interval

Demonstrație.

Fie f:I→R o funcție derivabilă cu $f'=0$ pe intervalul I. Fixăm un punct *a e I şi* considerăm un punct arbitrar *xeI, x≠a.*
Aplicăm teorema lui *Lagrange* pe intervalul *[a, x]* sau *[x, a]*. Există *c* cuprins între *a* şi *x* astfel încât $f(x)-f(a) = (x-a)f'(c)$ şi deoarece
$f'(c) = 0$, rezultă $f(x)-f(a)=0$. Cum *x* este arbitrar în I, deducem că f este constantă.

2. Dacă **două funcții au derivatele egale** pe un interval, atunci **diferența celor două funcții este constantă** pe acel interval

Demonstrație.

Fie *g* şi *h,* derivabile cu $g' = h'$ pe I. Aplicăm prima consecință pentru funcția $f=g-h$.

Alte consecințe ale teoremei lui *Lagrange* vor fi studiate în lecțiile următoare.

Probleme rezolvate.

1. Distanța de la Craiova la Timişoara pe şosea este de 330 km. Un automobil parcurge această distanță în 5 ore, cu viteză variabilă, dar fără să se oprească. Folosind *teorema lui Lagrange,* demonstrați că există cel puțin un moment în care vitezometrul indică viteza de 66 km/oră.

Soluție.

Notăm cu *s (t)* spațiul parcurs din momentul plecării până în momentul *t. (t* este exprimat în ore, iar *s(t),* în kilometri).
Funcția s:[0, 5]→R este derivabilă, *s'(t)* reprezentând viteza în momentul *t.*
Deci funcția este şi continuă.
Din teorema lui *Lagrange,* există c *e* (0,5) astfel încât $s'(c) = \frac{s(5)-s(0)}{5-0} = \frac{330}{5} = 66$
Rezultă concluzia, având în vedere că ***s'(c)*** reprezintă viteza în momentul *c.*

2. Demonstați că pentru orice *x e* [-1, 1] au loc

$$a)\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$b)\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

Soluție.

Demonstrăm numai identitatea de la a), punctul b) fiind analog.

Fie funcțiile $f, g : [-1,1] \to R,\ f(x) = \sin(\arccos x)$ şi $g(x) = \cos(\arcsin x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \exists c,\ f(x) - g(x) = c$

Dând lui *x* valoarea 0, rezultă c =f(0) -g(0), deci *f(x)* = *g*(x) pentru orice *x e* (-1, 1).

Se arată că *f(1) = g (1)* şi *f(-1) = g (-1),* deci formula este demonstrată

3. Rezolvați în R ecuația: $3^x + 6^x = 4^x + 5^x$.

Soluție.

Fie x, o soluție a ecuației. Fixăm pe x şi considerăm funcția f : $(0, \infty) \to R$, $f(t) = t^x$.

Ecuația se scrie f(6)-f(5)=f(4)-f(3).

Aplicând funcției f teorema lui *Lagrange* pe intervalele [5, 6] şi [3, 4],

rezultă că există c $\in (5, 6)$ şi d $\in (3, 4)$ astfel încât $f(6) - f(5) = f'(c) = xc^{x-1}$ şi $f(4)-f(3)=f'(c) = xd^{x-1}$.

EXERCIȚII DE INIȚIERE

1. Pentru fiecare dintre funcțiile $f:[a,b]\to R$, aflați valorile lui $c\in(a,b)$ astfel încât tangenta la graficul funcției f în punctul $(c, f(c))$ să fie paralelă cu coarda care unește punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

a) $f:[-1, 1]\to R$, $f(x)=x^2-3x$;

b) $f:[1, 5]\to R$, $f(x)=\sqrt{x-1}$;

c) $f:\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\to R$, $f(x)=\cos x$.

2. Aflați valorile lui a, b astfel încât

$$f:[-1, 1]\to R,\ f(x)=\begin{cases} a-x, & x\in[-1, 0] \\ be^{-x}, & x\in(0, 1]\end{cases}$$

să îndeplinească condițiile teoremei lui *Lagrange*. Aceeași problemă pentru funcțiile $g:[-1, 1]\to R$ și $h:[0, 2]\to R$, definite prin:

$$g(x)=\begin{cases} x^2+b, & x\in[-1, 0) \\ x^3+a(x-1), & x\in[0, 1]\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases} x^3+1, & x\in[0, 1) \\ ax+b, & x\in[1, 2]\end{cases}.$$

Pentru funcțiile g și h, aflați valoarea punctului intermediar.

PROBLEME ◆ PROBLEME ◆ PROBLEME

1. **Demonstrați că:**

   a) pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ au loc relațiile $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$;

   b) pentru orice $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ are loc relația $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \ge |x - y|$;

   c) pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc relația $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$.

2. **Demonstați că dacă** $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $a < b$, **avem:**

   a) $\cos b < \frac{\sin b - \sin a}{b - a} < \cos a$; b) $\sin a < \frac{\cos a - \cos b}{b - a} < \sin b$.

3. **Demonstrați că pentru orice** $a, b \in \mathbb{R}$ **are loc inegalitatea:**

$$\left|\ln\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right) - \ln\left(b + \sqrt{b^2 + 1}\right)\right| \le |a - b|.$$

4. **Demonstrați identitățile:** a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$;

   b) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $(\forall)\ x \in [-1, 1]$.

5. **Demonstrați că:** a) $\arccos \frac{1-x}{1+x} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, pentru $x \in [0, \infty)$;

   b) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$, pentru $x \in [-1, 1]$;

   c) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \pi, & x \in [1, \infty) \\ -\pi, & x \in (-\infty, 1] \end{cases}$.

6. **Demonstrați că există un interval pe care funcția definită prin relația**

$$g(x) = \arcsin\sqrt{1 - x^2} - \arcsin x$$

   este constantă. Precizați intervalul și valoarea constantei.

7. **Rezolvați în R ecuațiile:** $1 + 5^x = 2^x + 4^x$ și $7^x + 3^x = 2^x + 8^x$.

5. Calculul derivatei unei funcții într-un punct: corolarul teoremei lui *Lagrange*

Vom studia o consecință a teoremei lui *Lagrange* care furnizează ***o metodă de studiu al derivabilitătii unei funcții într-un punct***, în situația în care un calcul direct prin aplicarea regulilor de derivare nu este posibil.

Exemplu.

Funcția f:[-1, 1]->R, f(x) = arcsin x este derivabilă pe (-1,1) şi $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Studiul derivabilitătii în 1 si -l folosind definiția este laborios.

O metoda accesibilă este dată de:

Consecința (*corolarul*) teoremei lui *Lagrange*

1. Dacă o funcție f: *(a,* x_0] → R este continuă pe *(a,* x_0*]*, derivabilă pe *(a,* x_0*)* şi există $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f'(x)$, atunci $f_s'(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f'(x)$

2. Dacă o funcție f: *[*x_0, b) → R este continuă pe *[*x_0*, b)*, derivabilă pe *(*x_0*, b)* şi există $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f'(x)$ atunci $f_d'(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f'(x)$

3. Dacă o funcție este derivabilă pe *(a, b)- {*x_0*}* (unde x_0 *e (a, b))* este continuă *în* x_0 şi există $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ atunci

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f'(x)$$

Demonstrație.

1. Avem $f_s'(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f'(x)$ şi din teorema lui *Lagrange* pe intervalul [x,x_0] există c_x *e* (x, x_0) (care depinde de x), cu $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c_x)$ Rezultă: $f'_s(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f'(c_x)=\lim\limits_{\substack{c_x\to x_0\\ c_x<x_0}} f'(c_x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f'(x)$

Afirmația 2 se demonstrează analog, iar 3 rezultă din 1 şi 2.

❖ **Probleme rezolvate.** **1.** Studiați derivabilitatea funcției $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\arcsin x$ în 1 și -1. Interpretare geometrică.

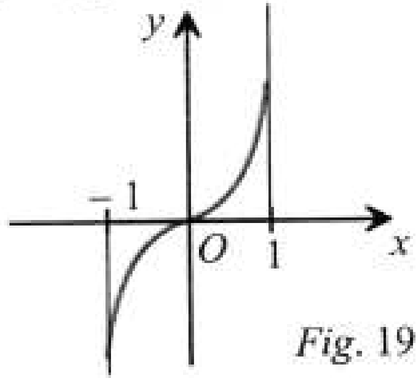


Fig. 19

Soluție. Funcția este continuă pe $[-1,1]$, derivabilă pe $(-1,1)$, iar $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ are limite laterale în 1 și -1, deci

$$f_s'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\infty \text{ și } f_d'(-1)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\infty.$$

Tangentele la grafic în 1 și -1 sunt verticale (vezi *figura* 19).

2. Reprezentați graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x^2-1|$ și calculați derivatele laterale în punctele -1 și 1.

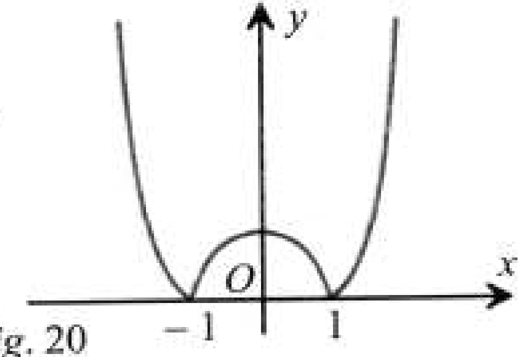


Fig. 20

Soluție. $$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\\ 1-x^2, & x\in(-1,1)\end{cases},$$

deci funcția f este derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ și

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\\ -2x, & x\in(-1,1)\end{cases}.$$

Funcția fiind continuă în 1 și -1, aplicăm corolarul teoremei lui *Lagrange*:

$$f_s'(-1)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}(2x)=-2,\ f_d'(-1)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(-2x)=2 \text{ și analog } f_s'(1)=-2 \text{ și } f_d'(1)=2.$$

Graficul este reprezentat în *figura* 20.

6. *Extindere* . Teorema lui *Cauchy*

Teorema lui *Cauchy*

Fie funcțiile *f, g: [a, b]* → *R,* care verifică condițiile:

(a) f şi g sunt **continue** pe intervalul *[a, b];*

(b) f şi *g* sunt **derivabile** pe intervalul *(a, b);*

(c) $g'(x) \neq 0$ pentru orice x *e* (a, *b*). atunci există *c* e (a, *b)* astfel încât

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Observații.

1. Teorema lui *Lagrange* se poate obține şi ca un caz particular al teoremei lui *Cauchy* dacă alegem *g(x) = x.*

2. Teorema lui *Cauchy* se mai numeşte şi *a doua teoremă a creşterilor finite* sau *a doua teoremă de medie.*

EXERCIȚII DE INIȚIERE

1. **Calculați prin două metode:**

a) derivatele laterale ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x+2|$ în $x=-2$;

b) derivata la dreapta a funcției $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x-1}$ în $x=1$;

c) derivatele laterale ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\geq 3 \\ 2x+3 & , x<3 \end{cases}$ în $x=3$.

2. **Fie funcția**

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^3-1 & , x\geq 2 \\ 2x & , x<2 \end{cases}.$$

Stabiliți dacă se poate aplica corolarul teoremei lui *Lagrange* pentru calcu-lul derivatelor laterale în 2.

3. **Aflați valorile parametrilor reali a și b pentru care funcțiile definite prin relațiile următoare sunt derivabile pe $\mathbb{R}$.**

a) $f(x)=\begin{cases} \sin 2x+ax & , x\geq 0 \\ \ln(1-x)+b & , x<0 \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} x\sin x+a+b & , x\geq \pi \\ a(x-b) & , x<\pi \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} x^3-ax+b & , x<1 \\ \frac{1}{x^2} & , x\geq 1 \end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & , x<2 \\ \frac{1}{x-1} & , x\geq 2 \end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+ax & , x\in[1,\infty) \\ bx^2 & , x\in(-\infty,1) \end{cases}$; f) $f(x)=\begin{cases} x^3+ax+2 & , x<0 \\ \ln(2x+1)+b & , x\geq 0 \end{cases}$.

PROBLEME ◆ PROBLEME ◆ PROBLEME

1. Aflați valorile lui a, b, c pentru care funcția

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx+c &, x>1 \\ x+3 &, x\le 1\end{cases}$$

este derivabilă de două ori pe R.

2. Pentru funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin relațiile de mai jos, aflați domeniul de derivabiliate. Reprezentați graficele funcțiilor și găsiți punctele unghiulare: a) $f(x)=|x|$; b) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt[3]{x^3}$; c) $f(x)=|x^2-4x+3|$; d) $f(x)=|\ln x|$.

3. Pentru fiecare dintre funcțiile de mai jos, aflați domeniul maxim de definiție și domeniul de derivabilitate. Calculați derivatele laterale în punctele în care funcția nu este derivabilă.

a) $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{x+1}$; b) $f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$; c) $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

4. Elevii unei clase au primit temă să studieze derivabilitatea funcției

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^3-2x+2 &, x\ge 1 \\ x^2-x &, x<1\end{cases} \text{ în } x=1.$$

Printre soluții s-au numărat următoarele:

Elevul A: $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-2 &, x>1 \\ 2x-1 &, x<1\end{cases}$, de unde rezultă că $f_s'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(2x-1)=1$ și $f_d'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(3x^2-2)=1$, deci f este derivabilă în 1 și $f'(1)=1$.

Elevul B: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=0$, și $f(1)=1$. Funcția nu este continuă în 1, prin urmare nu este derivabilă.

Elevul C: $f_s'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^2-x-1}{x-1}=\infty$ și $f_d'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x^3-2x+2-1}{x-1}=0$, deci funcția nu este derivabilă în 1.

Care soluție este corectă ? Explicați în ce constau greșelile.

5.*Studiați aplicabilitatea teoremei lui *Cauchy* pentru funcțiile:

a) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$ și $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=3x-1$;

b) $f:[1,e^2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$ și $g:[1,e^2]\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{e^2}{x}$.