Lectiile 1 si 2.

0.1 Principiul Brezis - Browder

Prezentăm în această secţiune un rezultat remarcabil, pe de o parte prin simplitatea enunţului şi eleganţa demonstraţiei, iar pe de altă parte prin multitudinea şi diversitatea aplicaţiilor. Acest rezultat, numit în cele ce urmează Principiul Brezis-Browder, a fost publicat în 1976 de Haïm Brezis şi Felix Browder [21]. Este un principiu de ordonare, de obţinere a elementelor maximale cu anumite proprietăţi, similar cu lema lui Zorn. Farmecul acestui rezultat constă în aceea că nu se bazează pe Axioma alegerii ci pe o axiomă mai slabă, *Axioma alegerii dependente,* utilizată frecvent în matematică. De asemenea, Principiul Brezis-Browder are o interpretare fizică interesantă legată de principiul entropiei din termodinamică. Vezi comentariile ce urmează după demonstraţia Teoremei 1.

Să prezentăm câteva observaţii privind Axioma Alegerii.

Axioma alegerii. *Dacă $\mathcal{F}$ este o familie de submulţimi nevide ale lui X, atunci există o funcţie $f : \mathcal{F} \to X$ cu proprietatea că $f(A) \in A$ pentru orice $A \in \mathcal{F}$.*

Pentru a înţelege mai bine sensul acestei axiome, să considerăm exemplul clasic al lui Bertrand Russell, unde $\mathcal{F}$ este o mulţime de perechi de pantofi, $\{A_i; i \in I\}$. Funcţia

$$f : \mathcal{F} \to \bigcup_{i\in I} A_i, \quad f(A_i) = \text{pantoful stâng al perechii } A_i,$$

selectează evident un pantof din fiecare pereche, printr-un procedeu bine determinat. Dacă însă $\mathcal{F}$ este o mulţime de perechi de ciorapi, atunci nu putem defini o funcţie $f : \mathcal{F} \to \cup A_i$ care să selecteze un ciorap din fiecare pereche, $f(A_i) \in A_i$, printr-un procedeu dat, deoarece o pereche de ciorapi este formată din două obiecte identice. Se poate demonstra că o astfel de funcţie de selecţie există atunci când $\mathcal{F}$ este finită, printr-un argument inductiv. Dar în matematică ne putem imagina mulţimi infinite de perechi, şi în acel caz avem nevoie de Axioma alegerii care să garanteze existenţa unei funcţii de selecţie.

Axioma alegerii este echivalentă cu

Lema lui Zorn *Dacă X este o mulţime parţial ordonată astfel încât orice lanţ în X este majorat, atunci X conţine cel puţin un element maximal.*

Axioma alegerii este de asemenea echivalentă cu

Teorema lui Zermelo *Dată o mulţime X, există o relaţie binară pe X faţă de care X este bine ordonată.*

Amintim că o relaţie binară pe o mulţime X, notată " $\preceq$ ", se numeşte *preordine* dacă este reflexivă şi tranzitivă. Mulţimea X se numeşte *parţial ordonată* dacă există o preordine pe X care este şi antisimetrică, adică

$$a \preceq b, \quad b \preceq a \implies a = b.$$

O mulţime parţial ordonată X se numeşte *bine ordonată* dacă fiecare submulţime nevidă a sa are un prim element, adică pentru fiecare $A \neq \emptyset,\ A \subset X$, există $a_0 \in A$ satisfăcând condiţia $a_0 \leq a$ pentru orice $a \in A$. Lema lui Zorn este echivalentă şi cu varianta în care relaţia binară este doar preordine.

Axioma alegerii şi echivalentele sale amintite mai sus sunt utile la demonstrarea unor rezultate fundamentale cum sunt teorema Hahn-Banach de prelungire a funcţionalelor liniare, teorema de existenţă a bazelor algebrice pentru spaţii liniare, teorema lui Tikhonov privind compactitatea spaţiului produs, teorema de existenţă a partiţiei unităţii în spaţii paracompacte (vezi Capitolul 1), teorema de existenţă a mulţimilor de numere reale care nu sunt Lebesgue măsurabile şi multe altele.

Chiar înainte de a fi formulată precis de Ernst Zermelo, Axioma alegerii a fost utilizată în mod mascat în matematica clasică şi în special în analiză. Este interesant de subliniat că, după cum s-a observat ulterior, multe din aceste aplicaţii clasice pot fi justificate doar pe baza unor axiome mai slabe, de exemplu, Axioma alegerii dependente sau Axioma alegerii numărabile.

Axioma alegerii dependente *Fie R o relaţie binară pe o mulţime nevidă A, cu proprietatea că pentru fiecare $x \in A$ mulţimea $\{y \in A; xRy\}$ este nevidă. Atunci, pentru fiecare $\xi \in A$ există un şir $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$, de elemente ale lui A, astfel încât $x_1 = \xi$ şi $x_n R x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.*

Această axiomă permite obţinerea unui şir în care fiecare element este dependent de precedentul. De altfel, aceasta se foloseşte destul de frecvent în raţionamente în care se pune în evidenţă un şir (x_n) după ce am pus în evidenţă, inductiv, x_n pentru fiecare n. Vezi, de exemplu, demonstraţia Teoremei lui Cesàro de la şiruri de numere reale [78, p.56]. De asemenea, această axiomă se utilizează în demonstraţia Teoremei lui Baire, Teorema **??**. Mai mult, în 1977 Charles E. Blair [18] a demonstrat că Teorema lui Baire implică Axioma alegerii dependente.

Axioma alegerii dependente este mai slabă decât Axioma alegerii [36].

Axioma alegerii numărabile *Dacă $\mathcal{F} = \{F_n; n \in \mathbf{N}\}$ este o familie numărabilă de submulţimi nevide ale lui X, atunci există un şir (x_n) cu proprietatea că $x_n \in F_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.*

Această axiomă este suficientă pentru demonstraţia faptului că o reuniune numărabilă de mulţimi numărabile este numărabilă sau în teorema de caracterizare cu şiruri a punctelor de acumulare.

In cele ce urmează, X este o mulţime pe care s-a definit o preordine “ $\preceq$ ”.

Teorema 1 (Brezis - Browder) *Fie* $(X, \preceq)$ *o mulţime parţial ordonată şi* $S : X \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ *o funcţie. Presupunem următoarele ipoteze:*

(i) *Fiecare şir crescător* (x_n) *în* X*, cu proprietatea că şirul* $(S(x_n))$ *este strict crescător, este majorat;*

(ii) *Funcţia* S *este monoton crescătoare.*

Atunci, pentru fiecare element $x_0 \in X$ *există* $\overline{x} \in X$ *astfel încât* $x_0 \preceq \overline{x}$ *şi* $S(x) = S(\overline{x})$ *pentru orice* x *cu proprietatea* $\overline{x} \preceq x$ *.*

Demonstraţie. Intr-o primă etapă, presupunem că funcţia S este majorată. Considerăm un element fixat $x_0 \in X$ şi construim inductiv un şir crescător (x_n) astfel: dacă x_n este determinat, considerăm

$$X_n = \{x \in X; x_n \leq x\}$$

şi

$$\beta_n = \sup\{S(x); x \in X_n\}.$$

Dacă x_n verifică concluzia, atunci demonstraţia se încheie. Dacă nu, atunci $\beta_n > S(x_n)$ şi deci putem determina x_{n+1} astfel încât $x_n \leq x_{n+1}$ şi

$$S(x_{n+1}) > \beta_n - \frac{\beta_n - S(x_n)}{2}. \tag{1}$$

Am construit astfel un şir (aici se foloseşte Axioma alegerii dependente) crescător (x_n) care are proprietatea că şirul $(S(x_n))$ este strict crescător. Datorită condiţiei (i), el este majorat, adică există $\overline{x} \in X$ astfel încât $x_n \preceq \overline{x}$ pentru orice n. Arătăm că acesta este elementul căutat în enunţ. Prin reducere la absurd, presupunem că există $y \in X$ astfel încât $\overline{x} \preceq y$ şi $S(\overline{x}) < S(y)$. Pe de altă parte şirul $(S(x_n))$ este crescător şi mărginit (deoarece am presupus că funcţia S este majorată) şi deci este convergent. Mai mult,

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n) \leq S(\overline{x})$$

şi $y \in X_n$ pentru orice n. Avem deci $\beta_n \geq S(y)$. Folosim acum (1) şi deducem

$$2S(x_{n+1}) - S(x_n) \geq \beta_n \geq S(y), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Trecând la limită cu $n \to \infty$ obţinem $S(\overline{x}) \geq S(y)$, ceea ce este absurd. Demonstraţia este încheiată în cazul când funcţia S este majorată.

Considerăm acum cazul general şi luăm funcţia

$$S_1 : X \to (-\pi/2, \pi/2], \quad S_1(x) = \arctan S(x).$$

Funcţia S_1 este crescătoare şi majorată, deci există un element $\overline{x} \in X$ care satisface concluzia teoremei cu S_1 în loc de S. Dar

$$\arctan S(\overline{x}) = \arctan S(x) \implies S(\overline{x}) = S(x),$$

ceea ce demonstrează concluzia în cazul general. □

Să facem câteva comentarii asupra acestui rezultat. In varianta prezentată în [21], funcţia S se presupune cu valori reale, chiar majorată. De asemenea, ipoteza (i) este mai tare şi anume:

(i') *Fiecare şir crescător în X este majorat.*

Extinderea, în ambele direcţii, aparţine lui Corneliu Ursescu. Ipoteza (i) este verificată, de exemplu, dacă mulţimea $S(X)$ este finită. Precizăm că posibilitatea ca funcţia S să fie nemărginită este utilă atunci când se discută existenţa soluţiilor saturate la sisteme diferenţiale. Vezi Corolarul 1.

Să prezentăm acum o interpretare a Principiului Brezis-Browder în termodinamică. Din legea a doua a termodinamicii rezultă că fiecare sistem închis are entropia S o funcţie crescătoare în timp. Stările cu entropie maximă corespund stărilor cu echilibru stabil. Să introducem în mulţimea stărilor sistemului o relaţie de ordine astfel: $x \preceq y$ înseamnă că sistemul poate trece de la starea x la starea y după un anumit timp. Un şir crescător înseamnă o posibilă evoluţie în timp a sistemului. Concluzia teoremei asigură tocmai existenţa unei stări de echilibru stabil x. Dacă sistemul este în x atunci entropia S nu mai creşte.

0.2 Aplicaţii ale Principiului Brezis-Browder la incluziuni diferenţiale

Prezentăm mai întâi o aplicaţie a Teoremei Brezis - Browder la existenţa soluţiilor maximale pentru incluziuni diferenţiale. De obicei, aceste rezultate se obţin în literatură folosind Lema lui Zorn care este echivalentă cu Axioma alegerii. Aici vom folosi Teorema Brezis - Browder şi deci numai Axioma alegerii dependente.

Fie incluziunea diferenţială

$$x'(s) \in F(x(s)) \tag{2}$$

unde $F : D \rightsquigarrow V$ este o multifuncţie cu valori nevide şi D este o submulţime nevidă a spaţiului finit dimensional V.

Prin *soluţie* a incluziunii diferenţiale (2) înţelegem o funcţie absolut continuă $x : [0, a) \to V$ care verifică (2) pentru aproape toţi $s \in [0, a)$ şi $x(s) \in D$ pentru orice $s \in [0, a)$. O soluţie este *saturată* dacă nu există o altă soluţie $y : [0, b) \to V$ a lui (2) cu proprietatea că $a < b$ şi x să fie egală cu restricţia lui y la $[0, a)$.

Demonstăm mai întâi următoarea propoziţie.

Propoziţia 1 *Fie X o familie de soluţii $x : [0, a) \to V$ ale incluziunii diferenţiale* (2)*, fie $S : X \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ funcţia dată prin $S(x) = a$ şi fie "$\preceq$" preordinea pe X dată prin $x \preceq y$ dacă şi numai dacă $S(x) \leq S(y)$ şi x coincide cu restricţia lui y la $[0, S(x))$. Presupunem în plus că fiecare şir crescător în X este majorat. Atunci fiecare element al lui X este majorat de un element maximal al lui X.*

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că funcţia S este crescătoare. Putem aplica Teorema 1 şi deducem că pentru fiecare $x \in X$ există $y \in X$ astfel încât $x \preceq y$ şi $S(y) = S(z)$ pentru $z \in X$ cu $y \preceq z$. Deoarece $y = z$ atunci când $S(y) = S(z)$ şi $y \preceq z$, urmează că y este maximal în X. □

Corolarul 1 *Orice soluţie a incluziunii diferenţiale* (2) *este restricţia unei soluţii saturate.*

Demonstraţie. Notăm cu X mulţimea tuturor soluţiilor $x : [0, \sigma) \to V$ pentru (2) şi aplicăm Propoziţia 1. Să remarcăm că un element y este maximal în X dacă şi numai dacă este soluţie saturată pentru (2). □

Demonstraţia existenţei soluţiilor saturate în maniera prezentată mai sus apare pentru prima dată în [27]. Trebuie subliniat faptul că nu este esenţial ca X să fie finit dimensional. Important este să avem un concept de soluţie pentru incluziunea diferenţială considerată. Vezi, de exemplu, incluziunea diferenţială semiliniară (3) în spaţii Banach.

Prezentăm acum o altă demonstraţie a teoremei de viabilitate folosind Principiul Brezis-Browder. Vom considera o incluziune diferenţială semiliniară în spaţii Banach. Ne vom ocupa doar de demonstrarea faptului că D este domeniu de viabilitate în ipoteza că este îndeplinită condiţia de tangenţă. Vezi şi **??**.

Fie X un spaţiu Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ generatorul infinitesimal al unui semigrup de clasă C_0, $S(t) : X \to X,\ t \geq 0$, D o submulţime a lui X şi $F : D \rightsquigarrow X$ o multifuncţie cu valori nevide închise convexe şi mărginite. Considerăm incluziunea diferenţială semiliniară

$$\frac{du}{dt}(t) \in Au(t) + F(u(t)) \quad t \geq 0 \tag{3}$$

şi condiţia iniţială

$$u(0) = \xi. \tag{4}$$

Funcţia $u : [\,0, T\,] \to D$ este o *soluţie continuă* pentru (3) şi (4) dacă există $f \in L^1([\,0,T\,]; X)$, cu $f(t) \in F(u(t))$ a.p.t. $t \in (0,T)$ şi astfel încât

$$u(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds$$

pentru $t \in [\,0,T\,]$.

Să considerăm următoarea condiţie de tangenţă

$(\mathcal{CT})$: *Pentru fiecare $\xi \in D$ există $y \in F(\xi)$, un şir (t_n) descrescător la 0 şi un şir (p_n) convergent la 0 astfel încât*

$$S(t_n)\xi + t_n(y + p_n) \in D$$

pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$.

Să observăm că în cazul în care $A = 0$, $(\mathcal{CT})$ se reduce la condiţia de tangenţă ce apare în Teorema **??**. In plus, ea este echivalentă cu următoarea condiţie de tangenţă modificată.

$(\mathcal{CTM})$: *Pentru fiecare $\xi \in D$ există $y \in F(\xi)$, un şir (t_n) descrescător la 0 şi un şir (p_n) convergent la 0 astfel încât*

$$S(t_n)\xi + \int_0^{t_n} S(t_n - s)y\,ds + t_n p_n \in D$$

pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$.

Următoarea propoziţie reprezintă un rezultat de existenţă a soluţiilor “aproximative” pentru (3) satisfăcând (4).

Propoziţia 2 *Fie X un spaţiu Banach real, D o mulţime nevidă şi local închisă din X, $F : D \rightsquigarrow X$ o multifuncţie local mărginită şi cu valori nevide, $A : D(A) \subset X \to X$ generatorul infinitesimal al unui semigrup de clasă C_0, $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$. Dacă D satisface condiţia de tangenţă $(\mathcal{CT})$ atunci pentru fiecare $\xi \in D$ există $r > 0$, $T > 0$ şi $K > 0$ astfel încât mulţimea $D \cap B(\xi, r)$ este închisă şi pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ şi fiecare vecinătate $V = B(0, 1/n)$ a originii există cinci funcţii măsurabile $f : [\,0,T\,] \to X$, $g : [\,0,T\,] \to X$, $\alpha : [\,0,T\,] \to [\,0,T\,]$, $\beta : \{(t,s);\ 0 \leq s < t \leq T\} \to [\,0,T\,]$ şi $u : [\,0,T\,] \to X$ satisfăcând*

(i) *$s - \frac{1}{n} \leq \alpha(s) \leq s$, $u(\alpha(s)) \in D \cap B(\xi, r)$ şi $f(s) \in F(u(\alpha(s)))$, a.p.t. $s \in [\,0,T\,]$*

(ii) *$\|f(s)\| \leq K$ a.p.t. $s \in [\,0,T\,]$*

(iii) *$u(T) \in D \cap B(\xi, r)$*

(iv) $g(s) \in V$ *a.p.t.* $s \in [0, T]$, $\beta(t, s) \leq t$ *pentru* $0 \leq s < t \leq T$ *şi funcţia* $t \mapsto \beta(t, s)$ *este neexpansivă pe* $(s, T]$

şi

$$u(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds + \int_0^t S(\beta(t,s))g(s)\,ds \tag{5}$$

pentru fiecare $t \in [0, T]$.

Demonstraţie. Să luăm $\xi \in D$ arbitrar şi să alegem $r > 0$, $T > 0$, şi $K > 0$ astfel încât $D \cap B(\xi, r)$ este închisă şi

$$\|y\| \leq K \tag{6}$$

pentru fiecare $x \in D \cap B(\xi, r)$ şi $y \in F(x)$ şi

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|S(t)\xi - \xi\| + TMe^{\omega T}(K+1) \leq r, \tag{7}$$

unde $M > 0$ şi $\omega \geq 0$ sunt astfel încât $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ pentru fiecare $t \geq 0$. Aceasta este posibil deoarece D este închisă, F este local mărginită şi $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$, este un semigrup de clasă C_0.

Fie $n \in \mathbf{N}^*$ şi fie $V = B(0, 1/n)$. Incepem prin a defini funcţiile f, g, α, β şi u pe un interval suficient de mic $[0, \delta]$ şi apoi vom arăta cum se extind la întregul interval $[0, T]$. Având în vedere condiţia de tangenţă modificată ($\mathcal{CTM}$), există $y \in F(\xi)$, $\delta > 0$ and $p \in V$, depinzând de n şi satisfăcând

$$S(\delta)\xi + \int_0^\delta S(\delta - s)y\,ds + \delta p \in D.$$

Să definim $u : [0, \delta] \to X$ prin

$$u(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)y\,ds + tp \tag{8}$$

pentru fiecare $t \in [0, \delta]$. Să remarcăm că, deoarece

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)y\,ds + tp = \xi$$

uniform pentru $p \in X$ cu $\|p\| \leq 1$ şi $y \in X$ cu $\|y\| \leq K$, putem alege $\delta \in (0, \frac{1}{n}]$, destul de mic încât u, y şi p să satisfacă următoarele relaţii

(j) $y \in F(u(0))$

(jj) $\|y\| \leq K$

(jjj) $u(\delta) \in D \cap B(\xi, r)$

(jv) $p \in V$.

Punând $f(s) = y$, $g(s) = p$, $\alpha(s) = 0$ şi $\beta(t,s) = 0$ pentru $s \in [\,0, \delta\,]$ şi $0 \leq s < t \leq \delta$, din $(j) - (jv)$ şi (8), deducem uşor că (f, g, α, β, u) satisfac $(i) - (iv)$ şi (5) cu T înlocuit cu δ.

In continuare, arătăm că pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ există cel puţin o cvintuplă (f, g, α, β, u) a cărui domeniu se notează cu $D(T)$, unde, pentru $a \in \mathbf{R}_+$

$$D(a) = [\,0, a\,] \times [\,0, a\,] \times [\,0, a\,] \times \{(t, s);\ 0 \leq s < t \leq a\} \times [\,0, a\,],$$

satisfăcând $(i) - (iv)$ şi (5). Pentru aceasta vom folosi Teorema Brezis-Browder. Fie $\mathcal{U}$ mulţimea acelor (f, g, α, β, u) definite pe $D(a)$ cu $a \leq T$ şi satisfăcând $(i) - (iv)$ şi (5) pe $[\,0, a\,]$. Această mulţime este nevidă deoarece u definit de (8) aparţine lui $\mathcal{U}$. Pe $\mathcal{U}$ introducem o ordine parţială în modul următor. Spunem că $(f_u, g_u, \alpha_u, \beta_u, u)$ definit pe $D(a)$ şi $(f_v, g_v, \alpha_v, \beta_v, v)$ definit pe $D(b)$ satisfac

$$(f_u, g_u, \alpha_u, \beta_u, u) \leq (f_v, g_v, \alpha_v, \beta_v, v)$$

dacă $a \leq b$, $f_u(s) = f_v(s)$, $g_u(s) = g_v(s)$, $\alpha_u(s) = \alpha_v(s)$ a.p.t. $s \in [\,0, a\,]$ şi $\beta_u(t, s) = \beta_v(t, s)$ pentru $0 \leq s < t \leq a$. Fie de asemenea funcţia crescătoare $S : \mathcal{U} \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ definită prin $S((f, g, \alpha, \beta, u)) = a$.

Fie

$$\mathcal{L} = \{(f_i, g_i, \alpha_i, \beta_i, u_i) : D(a_i) \to X \times X \times [\,0, a_i\,] \times [\,0, a_i\,] \times X;\ i \in \mathbf{N}\}$$

un şir crescător în $\mathcal{U}$. Definim un majorant al lui $\mathcal{L}$ astfel. Punem

$$a^* := \sup\{a_i;\ i \in \mathbf{N}\}.$$

Dacă $a^* = a_i$ pentru un $i \in \mathbf{N}$, $(f_i, g_i, \alpha_i, \beta_i, u_i)$ este clar un majorant pentru $\mathcal{L}$. Dacă $a_i < a^*$ pentru fiecare $i \in \mathbf{N}$, definim

$$f(s) = f_i(s), \quad g(s) = g_i(s), \quad \alpha(s) = \alpha_i(s)$$

pentru $i \in \mathbf{N}$ şi a.p.t. $s \in [\,0, a_i\,]$ şi

$$\beta(t, s) = \begin{cases} \beta_i(t, s) & \text{dacă } 0 \leq s < t \leq a_i < a^* \\ \\ \lim\limits_{i} \beta_i(a_i, s) & \text{dacă } 0 \leq s < a_i < t = a^*. \end{cases}$$

Observăm acum că (f, g, α, β, u), unde f, g, α şi β sunt definiţi ca mai sus iar u este dat de (5), satisface (i), (ii) şi (iv). Mai mult, deoarece pentru fiecare $s \in [\,0, a^*)$, funcţia $t \mapsto \beta(t, s)$ este neexpansivă pe $(s, a^*]$ şi $f, g \in L^\infty([\,0, a^*\,]; X)$, un argument simplu pe baza Teoremei lui Lebesgue [77] arată că u este continuă pe $[\,0, a^*\,]$. Deci există

$$\lim_i u_i(a_i) = u^* = u(a^*) \tag{9}$$

în X. Deoarece din (iii), $u_i(a_i) \in D \cap B(\xi, r)$ pentru fiecare $i \in \mathbf{N}$, iar $D \cap B(\xi, r)$ este închisă, din (9) deducem că u satisface (iii). In plus

$$(f_i, g_i, \alpha_i, \beta_i, u_i) \leq (f, g, \alpha, \beta, u)$$

pentru fiecare $i \in \mathbf{N}$ şi astfel $\mathcal{U}$ satisface ipotezele Teoremei 1. Fie (f, g, α, β, u) în $\mathcal{U}$ cu domeniul $D(a)$ care satisface concluzia Teoremei 1.

Să arătăm că $a = T$. Pentru aceasta presupunem prin absurd că $a < T$ şi fie $\xi_a = u(a)$ care aparţine lui $D \cap B(\xi, r)$. Din (i), (ii), (iii), (iv), (5), (6) şi (7) obţinem

$$\begin{aligned}
\|\xi_a - \xi\| &\leq \|S(a)\xi - \xi\| + \int_0^a \|S(a-s)f(s)\|\, ds + \int_0^a \|S(\beta(a,s))g(s)\|\, ds \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq a} \|S(t)\xi - \xi\| + aMe^{\omega a}(K + M_0) < r.
\end{aligned}$$

Din condiţia de tangenţă combinată cu inegalitatea de mai sus deducem că există $y_a \in F(\xi_a)$, $\delta_a \in (0, \frac{1}{n}]$ cu $a + \delta_a \leq T$ şi $p_a \in V$ astfel încât

$$S(\delta_a)\xi_a + \int_0^{\delta_a} S(\delta_a - s) y_a\, ds + \delta_a p_a \in D \cap B(\xi, r). \tag{10}$$

Definim $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{\alpha}$ şi $\tilde{\beta}$ pe $[\,0, a + \delta_a\,]$ în modul următor:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{dacă } \ t \in [\,0, a\,] \\ y_a & \text{dacă } \ t \in [\,a, a + \delta_a\,], \end{cases}$$

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t) & \text{dacă } \ t \in [\,0, a\,] \\ p_a & \text{dacă } \ t \in [\,a, a + \delta_a\,], \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{dacă } \ t \in [\,0, a\,] \\ a & \text{dacă } \ t \in [\,a, a + \delta_a\,], \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}(t, s) = \begin{cases} \beta(t, s) & \text{dacă } \ 0 \leq s < t \leq a \\ t - a + \beta(a, s) & \text{dacă } \ 0 \leq s < a < t \leq a + \delta_a \\ 0 & \text{dacă } \ a \leq s < t \leq a + \delta_a \end{cases}$$

şi

$$\tilde{u}(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)\tilde{f}(s)\,ds + \int_0^t S(\tilde{\beta}(t,s))\tilde{g}(s)\,ds$$

pentru $t \in [\,0, a+\delta_a\,]$. Pentru a obţine o contradicţie e suficient să arătăm că $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{u}) \in \mathcal{U}$. Este clar că $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ şi $\tilde{u}$ satisfac (i), (ii), (iv) şi (5). Pentru a arăta (iii), să observăm mai întâi că

$$\tilde{u}(t) = S(t-a)\xi_a + \int_a^t S(t-s)y_a\,ds + (t-a)p_a$$

pentru $t \in [\,a, a+\delta_a\,]$ şi deci $\tilde{u}(a+\delta_a) \in D$. In plus, din (10), (i), (ii), (iv), (6), şi (7), obţinem

$$\|\tilde{u}(t) - \xi\| \leq \|S(t)\xi - \xi\| + \int_0^t \|S(t-s)\tilde{f}(s)\|\,ds + \int_0^t \|S(\tilde{\beta}(t,s))\tilde{g}(s)\|\,ds$$

$$\leq \sup_{0\leq t\leq T} \|S(t)\xi - \xi\| + TMe^{\omega T}(K + M_0) \leq r$$

pentru fiecare $t \in [0, a+\delta_a]$ şi deci $\tilde{u}(a+\delta_a) \in B(\xi, r)$. Obţinem că (iii) este satisfăcută şi deci $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{u}) \in \mathcal{U}$. Este clar că $(f, g, \alpha, \beta, u) \leq (\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{u})$ şi

$$S((f, g, \alpha, \beta, u)) < S((\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{u}))$$

ceea ce este în contradicţie cu (iii) din Teorema 1. $\square$

Suntem în măsură să prezentăm acum un rezultat de viabilitate pentru incluziunea diferenţială (3).

Teorema 2 *Fie X un spaţiu Banach reflexiv, D o mulţime nevidă local închisă în X şi $F : D \rightsquigarrow X$ o multifuncţie cu valori închise convexe care este tare-slab superior semicontinuă şi local mărginită. Fie $A : D(A) \subset X \to X$ generatorul infinitezimal al unui semigrup compact de clasă C_0, $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$. Atunci, o condiţie suficientă ca D să fie domeniu de viabilitate pentru* (3) *este condiţia de tangenţă* $(\mathcal{CT})$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{V} = \{B(0, \frac{1}{n});\ n \in \mathbf{N}^*\}$ un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii pentru topologia tare a lui X. In baza Propoziţiei 2, pentru fiecare $\xi \in D$ există $r > 0$, $T > 0$, $K > 0$ astfel încât $D \cap B(\xi, r)$ este închisă în X şi pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ există cel puţin o soluţie aproximativă $(f_n, g_n, \alpha_n, \beta_n, u_n)$ definită pe $D(T)$, unde $V_n = B(0, \frac{1}{n})$, satisfăcând

(l) $s - \frac{1}{n} \leq \alpha_n(s) \leq s$, $u_n(\alpha_n(s)) \in D \cap B(\xi, r)$ şi $f_n(s) \in F(u_n(\alpha_n(s)))$, a.p.t. $s \in [\,0, T\,]$

(ll) $\|f_n(s)\| \leq K$ a.p.t. $s \in [\,0, T\,]$

(lll) $u_n(T) \in D \cap B(\xi, r)$

(lv) $g_n(s) \in V_n$ a.p.t. $s \in [\,0, T\,]$, $\beta_n(t, s) \leq t$ pentru $0 \leq s < t \leq T$ şi funcţia $t \mapsto \beta_n(t, s)$ este neexpansivă pe $(s, T\,]$

şi

$$u_n(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s) f_n(s)\, ds + \int_0^t S(\beta_n(t, s)) g_n(s)\, ds \tag{11}$$

pentru fiecare $t \in [\,0, T\,]$. Să remarcăm că (11) poate fi rescrisă în forma

$$u_n(t) - \int_0^t S(\beta_n(t, s)) g_n(s)\, ds = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s) f_n(s)\, ds \tag{12}$$

pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ şi $t \in [\,0, T\,]$. Din (ll) avem că $\{f_n;\ n \in \mathbf{N}^*\}$ este mărginit în $L^\infty([\,0, T\,]; X)$. Deoarece semigrupul $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$, este compact, din [94, p.47] urmează că există $u \in C([\,0, T\,]; X)$ astfel încât, cel puţin pe un subşir, avem

$$\lim_n \left(u_n(t) - \int_0^t S(\beta_n(t, s)) g_n(s)\, ds \right) = u(t)$$

uniform pentru $t \in [\,0, T\,]$. Pe de altă parte, din (lv), avem că $g_n(s) \in V_n$ pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ şi a.p.t. $s \in [\,0, T\,]$. Astfel

$$\lim_n \int_0^t S(\beta_n(t, s)) g_n(s)\, ds = 0$$

uniform pentru $t \in [\,0, T\,]$ şi deci,

$$\lim_n u_n(t) = u(t)$$

uniform pentru $t \in [\,0, T\,]$. Având în vedere că, din (l),

$$\lim_n \alpha_n(t) = 0$$

uniform pentru $t \in [\,0, T\,]$, urmează uşor că

$$\lim_n u_n(\alpha_n(t)) = u(t)$$

uniform pentru $t \in [0, T]$ şi deci, din (l), $u(t) \in D \cap B(\xi, r)$ pentru fiecare $t \in [0, T]$. Să observăm că există $f \in L^2([0, T]; X)$ astfel încât, cel puţin pe un subşir,

$$\lim_n f_n = f$$

slab în $L^2([0, T]; X)$. Din Teorema **??** deducem că $f(t) \in F(u(t))$ a.p.t. $t \in [0, T]$. Trecând la limită în ambii membri ai egalităţii (12) pentru $n \to \infty$ deducem că u este soluţie slabă pentru (3) şi (4) şi aceasta completează demonstraţia.

□

Teorema 2 a fost demonstrată în [28] folosind Lema lui Zorn.

Prezentăm în continuare o aplicaţie interesantă în teoria semigrupurilor.

Propoziţia 3 *Fie X un spaţiu Banach, $S(t)$, $t \geq 0$, un semigrup de clasă C_0 pe X şi $D \subset X$ o mulţime închisă. Presupunem condiţia*

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} d(S(t)x, D) = 0, \qquad \forall x \in D.$$

Atunci $S(t)x \in D$ pentru orice $x \in D$ şi $t \geq 0$.

Demonstraţie. Dacă X este reflexiv, se aplică Teorema 2. In cazul general, se poate da o demonstraţie directă folosind Principiul Brezis-Browder. Vezi Problema **??**.

□

0.3 Principiul variaţional al lui Ekeland

In continuare, vom deduce din Teorema Brezis-Browder un rezultat fundamental din Analiza funcţională neliniară şi anume Principiul variaţional al lui Ekeland [35].

Teorema 3 *Fie (X, ρ) un spaţiu metric complet şi $f : X \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ o funcţie inferior semicontinuă, mărginită inferior, cu proprietatea că există $x \in X$ astfel încât $f(x) \neq \infty$. Pentru $\varepsilon > 0$ fie $x_0 \in X$ cu proprietatea*

$$f(x_0) < \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon.$$

Fie $\delta > 0$. Atunci, există $\overline{x} \in X$ cu următoarele proprietăţi:

$$\begin{array}{lll} (a) & f(\overline{x}) \;\leq\; f(x_0); & \\ (b) & \rho(\overline{x}, x_0) \;\leq\; \delta; & \\ (c) & f(x) \;>\; f(\overline{x}) - \frac{\varepsilon}{\delta}\, \rho(\overline{x}, x), & \text{pentru} \quad x \neq \overline{x}. \end{array}$$

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea vom considera $\delta = 1$ (altfel schimbăm metrica). Definim pe X ordinea:

$$x \preceq y \iff f(x) - \varepsilon\rho(x,y) \geq f(y),$$

şi aplicăm Teorema 1 cu $S = -f$. Se verifică uşor proprietăţile de preordine pentru relaţia " $\preceq$ " definită mai sus. De asemenea funcţia S este crescătoare. Să arătăm că orice şir crescător este majorat. Fie (x_n) un şir crescător. Pentru $n \leq m$ avem

$$f(x_n) - f(x_m) \ \geq \ \varepsilon\ \rho(x_n, x_m). \tag{13}$$

Prin urmare, şirul $(f(x_n))$ este descrescător şi minorat, deci este convergent. Din (13) obţinem că (x_n) este şir Cauchy, deci convergent. Vom arăta că limita sa, notată y, este un majorant pentru (x_n). Aceasta rezultă din relaţia (13) făcând $m \to \infty$ şi ţinând seama că f este inferior semicontinuă, deci

$$\lim_{m\to\infty} f(x_m) \leq f(y).$$

Obţinem

$$f(x_n) - f(y) \geq \varepsilon\ \rho(x_n, y),$$

ceea ce arată că $x_n \preceq y$, pentru orice n. Aşadar, putem aplica Teorema 1 şi deducem că, pentru orice $x_0 \in X$ există $\overline{x} \in X$ astfel încât

$$f(x_0) - \varepsilon\rho(x_0, \overline{x}) \geq f(\overline{x}) \tag{14}$$

şi

$$f(\overline{x}) - \varepsilon\rho(\overline{x}, x) \geq f(x) \Longrightarrow f(\overline{x}) = f(x). \tag{15}$$

Din (15) deducem

$$x \neq \overline{x} \Longrightarrow f(x) > f(\overline{x}) - \varepsilon\rho(x, \overline{x}). \tag{16}$$

Intr-adevăr, presupunând contrariul, din (15) obţinem $f(\overline{x}) = f(x)$, apoi $\rho(x, \overline{x}) \leq 0$ şi deci $x = \overline{x}$.

Aşadar, am demonstrat că în condiţiile teoremei, pentru orice $x_0 \in X$ există $\overline{x} \in X$ care verifică (14) şi (15). Dar (15) este tocmai (c), (14) implică imediat (a), iar dacă pe x_0 îl alegem ca în enunţ, din (14) avem

$$\varepsilon\rho(x_0, \overline{x}) \leq f(x_0) - f(\overline{x}) \leq f(x_0) - \inf_{x\in X} f(x) < \varepsilon$$

şi deci (b). Teorema este astfel complet demonstrată. □

Rezultatul prezentat mai sus, demonstrat de Ivar Ekeland în 1974 [35], s-a dovedit extrem de util în numeroase domenii: teoria optimizării, teoria controlului optimal, teoreme de punct fix, analiză globală.

Iată o interpretare foarte simplă în teoria optimizării. Pentru existenţa unui punct de minim al unei funcţionale f există rezultate de tip Teorema lui Weierstrass (vezi Secţiunea care urmează). Dacă acestea nu funcţionează atunci se caută soluţii aproximative. Teorema 3 oferă astfel de soluţii. Mai precis, $\overline{x}$ dat de Teorema 3 este punct de minim pentru funcţia perturbată

$$x \mapsto f(x) + \frac{\varepsilon}{\delta}\, \rho(\overline{x}, x).$$

Condiţia (b) localizează acest punct. Este clar că există un balans: dacă δ este mic atunci se ştie mai bine poziţia lui $\overline{x}$ dar perturbarea este mai mare. Situaţia de mijloc ar fi $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Să observăm că existenţa punctului x_0 din enunţul Teoremei 3 este asigurată întotdeauna de caracterizarea infimumului deci putem să renunţăm la ea, în schimb pierdem informaţia de la concluzie. Avem deci

Corolarul 2 *Fie X şi f ca în Teorema* 3. *Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\overline{x} \in X$ cu proprietăţile*

(i) $f(\overline{x}) \leq \inf_{x\in X} f(x) + \varepsilon$;

(ii) $f(x) \geq f(\overline{x}) - \varepsilon\rho(x, \overline{x}), \ \ \forall x \in X.$

Corolarul 3 *Fie X spaţiu Banach şi f diferenţiabilă Gateaux, inferior semicontinuă şi mărginită inferior. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\overline{x} \in X$ cu proprietăţile*

(i) $f(\overline{x}) \leq \inf_{x\in X} f(x) + \varepsilon$;

(iii) $\|f'(\overline{x})\| \leq \varepsilon.$

Demonstraţie. Aplicăm Corolarul 2 şi obţinem $\overline{x}$ care verifică (i) şi apoi luăm în (ii) $x = \overline{x} + t\, y$ unde y este arbitrar în X şi $t > 0$. Obţinem

$$\frac{f(\overline{x} + t\, y) - f(\overline{x})}{t} \geq -\varepsilon\|y\|.$$

Trecem la limită cu $t \to 0$ şi obţinem $f'(\overline{x})(y) \geq -\varepsilon\|y\|$ pentru orice $y \in X$, deci $|f'(\overline{x})(y)| \leq \varepsilon\|y\|$, ceea ce conduce la (iii). □

Observaţia 1 Dacă $\overline{x}$ este punct de minim pentru f atunci (i) şi (iii) se verifică pentru $\varepsilon = 0$. Dar în absenţa punctelor de minim putem să determinăm puncte care "aproape minimizează" f şi "aproape satisfac condiţia necesară". Mai precis, condiţiile $f(\overline{x}) = \inf_{x\in X} f(x)$ şi $f'(\overline{x}) = 0$ sunt satisfăcute cu oricâtă acurateţe dorim. Să mai observăm că din (i) şi (iii) rezultă existenţa unui şir minimizant (x_n), adică $f(x_n) \to \inf_{x\in X} f(x)$, cu proprietatea $f'(x_n) \to 0$. Acest fapt arată că următoarea condiţie de tip *Palais - Smale* asigură existenţa punctelor de minim.

(PS) *Dacă $f'(x_n) \to 0$ iar şirul $(f(x_n))$ este mărginit atunci şirul (x_n) are un subşir convergent.*

Intr-adevăr, din condiţia (PS) rezultă că un subşir al lui (x_n) converge la $x_0 \in X$ iar din continuitatea lui f urmează $f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x)$.

Incheiem această secţiune cu o aplicaţie a Teoremei lui Ekeland in teoria punctelor fixe. Mai precis, vom prezenta o extindere a teoremei contracţiilor a lui Banach.

Fie deci (X, ρ) un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ o funcţie. Celebrul principiu al contracţiilor afirmă că dacă există un număr $\varepsilon \in (0, 1)$ astfel încât

$$\rho(f(x), f(y)) \le \varepsilon\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X, \tag{17}$$

atunci f are un punct fix unic (Teorema **??**). O funcţie care verifică (17) cu $\varepsilon \in (0, 1)$ se numeşte contracţie. Să introducem o noţiune mai slabă şi anume cea de contracţie direcţională. Pentru aceasta, să precizăm că într-un spaţiu metric (X, ρ), pentru $x, y \in X$ definim *segmentul deschis* $]x, y[$ ca fiind mulţimea punctelor $z \in X$ distincte de x şi y care au proprietatea

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, y).$$

Spunem că o funcţie $f : X \to X$ este *contracţie direcţională* dacă este continuă şi există $\varepsilon \in (0, 1)$ cu următoarea proprietate: dacă $x \in X$ este astfel încât $f(x) \neq x$ atunci există y în $]x, f(x)[$ astfel încât

$$\frac{\rho(f(x), f(y))}{\rho(x, y)} \le \varepsilon.$$

Este clar că într-un spaţiu metric *convex*, adică un spaţiu metric cu proprietatea că segmentul deschis $]x, y[$ cu $x \neq y$ este nevid, orice contracţie este o contracţie direcţională. Iată un exemplu de contracţie direcţională care nu este contracţie. In spaţiul $\mathbf{R}^2$ cu metrica

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

luăm funcţia

$$f(x, y) = \left(\frac{3x}{2} - \frac{y}{3}, x + \frac{y}{3}\right).$$

Vezi Problema **??**.

Teorema 4 *Intr-un spaţiu metric complet, orice contracţie direcţională are cel puţin un punct fix.*

Demonstraţie. Fie (X, ρ) un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ o contracţie direcţională. Definim $F : X \to \mathbf{R}$ prin

$$F(x) = \rho(x, f(x))$$

şi observăm că F este continuă şi mărginită inferior. Ideea este de a găsi un punct x care să minimizeze F şi mai mult $F(x) = 0$. Este clar că acel x va fi punct fix pentru f. Lipsa unor condiţii de compactitate este o problemă pentru atingerea unui punct de minim. Tocmai aici intervine Teorema lui Ekeland. Teorema 3 asigură existenţa unui punct x cu proprietatea că pentru orice $y \in X$ avem

$$\rho(y, f(y)) \geq \rho(x, f(x)) - \frac{1-\varepsilon}{2}\rho(x, y).$$

Dacă $x = f(x)$ atunci demonstraţia se încheie. Dacă nu, deoarece f este contracţie direcţională, există $y \neq x$ care satisface

$$\rho(x, y) + \rho(y, f(x)) = \rho(x, f(x))$$

şi

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \varepsilon\rho(x, y).$$

Avem

$$0 \leq \varepsilon\rho(x, y) - \rho(f(x), f(y)) \leq \varepsilon\rho(x, y) - \rho(f(y), y) + \rho(y, f(x)) =$$

$$(\varepsilon - 1)\rho(y, x) - \rho(f(y), y) + \rho(x, f(x)) \leq \frac{\varepsilon - 1}{2}\rho(x, y).$$

Cum $\varepsilon < 1$, obţinem $x = y$. Contradicţia la care am ajuns încheie demonstraţia. $\square$

0.4 Probleme de extrem. Metode directe în calculul variaţiilor

Problematica studiată în această secţiune porneşte de la două rezultate clasice ale analizei matematice, şi anume:

Teorema lui Weierstrass *O funcţie continuă* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, *are un minim şi un maxim pe* $[a, b]$.

Teorema lui Fermat *Dacă* $c \in \operatorname{int} I$ *este un punct de extrem pentru funcţia* $f : I \to \mathbf{R}$ *şi* f *este derivabilă în* c*, atunci* $f'(c) = 0$.

Teorema lui Weierstrass se poate extinde la cazul $f : M \to \mathbf{R}$ cu M o mulţime compactă dintr-un spacţiu topologic (separat Hausdorff). In particular, dacă X este spaţiu liniar finit dimensional, M poate fi marginită şi închisă. In spaţii infinit dimensionale, rezultatul nu mai este adevărat pentru mulţimi mărginite şi închise (acestea nefiind numaidecât compacte). Acest fapt se suplineşte prin condiţii de continuitate mai tare. Pe de altă parte, se observă că pentru existenţa punctului de minim semicontinuitatea inferioară este suficientă.

Pornind de la aceste observaţii, vom prezenta în această secţiune o serie de rezultate privind existenţa punctelor de minim, numite în literatură *metode directe în calculul variaţiilor*. Este evident că ne putem limita doar la probleme legate de puncte de minim, pentru cele de maxim considerându-se funcţia $-f$.

Să ne oprim acum asupra teoremei lui Fermat. In esenţă, aceasta spune că dacă f este derivabilă pe o mulţime deschisă din $\mathbf{R}$, atunci punctele de minim din acea mulţime sunt soluţii ale ecuaţiei

$$f'(x) = 0,$$

numită de Joseph Louis Lagrange *ecuaţia lui Euler*. Acest rezultat se extinde uşor la cazul spaţiilor Banach, derivabilitatea înlocuindu-se cu diferenţiabilitatea Gateaux.

In acest mod, obţinem o metodă importantă de rezolvare a ecuaţiilor de tip Euler, rezolvând probleme de minim. Aceasta metodă provine de la Leonhard Euler (1744). In 1766 el introduce termenul *calculul variaţiilor*. In acest context, *principiul lui Dirichlet* are un rol fundamental. Acest principiu afirmă existenţa unei soluţii a problemei de minim (problema lui Dirichlet):

$$\min \int_D (u_x^2 + u_y^2)dxdy, \quad u = g \text{ pe } \operatorname{Fr}(D),$$

care este implicit soluţie a problemei la limită pentru ecuaţia lui Laplace în plan:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ pe } D, \quad u = g \text{ pe } \operatorname{Fr}(D),$$

şi care reprezintă ecuaţia lui Euler pentru problema de minim a lui Dirichlet.

Principiul lui Dirichlet, numit astfel de Bernhard Riemann în 1857, a fost criticat de Karl Weierstrass (1870) pe motivul că problema existenţei punctelor de minim nu este rezolvată. Weierstrass a dat un exemplu de problemă variaţională care nu are soluţie (are infimum dar acesta nu se atinge). Vezi Problema **??**. Limitele acestei abordări constau în faptul că spaţiul de funcţii pe care se consideră problema de minim, $C^1(\overline{D})$, este prea restrâns şi sărac în proprietăţi care, după cum vom vedea în continuare, sunt esenţiale în studiul problemelor variaţionale. De exemplu, nu este reflexiv. Aceste limite au fost sesizate de David Hilbert care, într-o faimoasă conferinţă prezentată la Congresul mondial al matematicienilor de la Paris din 1900, a afirmat importanţa principiului lui Dirichlet în rezolvarea problemelor la limită, dar a sugerat ideea generalizării conceptului de soluţie. Acest demers a reprezentat o cotitură în dezvoltarea ulterioară a matematicii, conducând la apariţia spaţiilor Hilbert şi a ideii de ortogonalitate în acestea, introducerea integralei Lebesgue şi a spaţiilor (complete) de funcţii integrabile, introducerea spaţiilor Sobolev şi a ideii de reflexivitate.

Ne ocupăm acum de studiul existenţei în probleme de minim. Fie $f : M \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, unde $M \subset X$ iar X este spaţiu topologic, şi fie problema de minim

$$\min_{x \in M} f(x) = m. \tag{18}$$

Rezultatul central este cuprins în următoarea teoremă.

Teorema 5 *Fie X un spaţiu topologic. Presupunem că, pentru fiecare $\alpha \in \mathbf{R}$, mulţimile de nivel*

$$M_\alpha = \{x \in M; f(x) \le \alpha\}$$

sunt compacte. Atunci, f este mărginită inferior pe M şi îşi atinge infimumul, adică problema de minim (18) are soluţie în M. In particular, concluzia este adevărată dacă se presupune că f este inferior semicontinuă iar M este compactă. Concluzia este adevărată dacă se impune condiţia, mai slabă, că mulţimile de nivel sunt secvenţial compacte.

Demonstraţie. Fie $m = \inf_{x\in M} f(x)$. Dacă $m = \infty$, $f = \infty$ şi concluzia este clară. Dacă $m < \infty$, fie $m < \alpha_0 < \infty$. Este clar că intersecţia unui număr finit de mulţimi de tipul M_α cu $m < \alpha \le \alpha_0$ este nevidă. Din proprietatea intersecţiei finite aplicată mulţimii compacte M_{α_0}, există

$$x_0 \in \bigcap_{m<\alpha\le\alpha_0} M_\alpha.$$

De aici se obţine uşor că $m = f(x_0)$, ceea ce încheie demonstraţia primei părţi. Dacă f este inferior semicontinuă şi M este compactă, atunci mulţimile de nivel sunt închise în M şi deci compacte.

Presupunem acum că mulţimile de nivel sunt secvenţial compacte. Fie (x_n) un şir minimizant, adică un şir în M pentru care $f(x_n) \to m$. Fie $r > m$ fixat.

Atunci $x_n \in M_r$ pentru n suficient de mare. Deoarece mulţimea M_r este secvenţial compactă, există un subşir al lui (x_n), notat (x_{n_k}), ce converge la un element $x_0 \in M_r$. Fie acum $m < \alpha < r$. Se aplică raţionamentul de mai sus pentru (x_{n_k}) şi M_α şi obţinem

$$x_0 \in \bigcap_{\alpha > m} M_\alpha,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Dacă M nu este mărginită, în spaţii Banach se impune o condiţie de coercivitate asupra funcţiei f. In plus, se utilizează topologia slabă pentru a evita condiţia de compactitate în topologia tare, destul de restrictivă. Acest fapt este facilitat de rezultate fine de analiză funcţională, cum sunt:

(Alaoglu) *O mulţime mărginită din dualul unui spaţiu normat este slab stelat relativ compactă.*

In particular,

O mulţime mărginită într-un spaţiu Banach reflexiv este slab relativ compactă.

(Eberlein-Smulian) *O mulţime într-un spaţiu Banach este slab compactă dacă şi numai dacă este slab secvenţial compactă.*

Intr-un spaţiu Banach, dacă M este slab relativ compactă, atunci închiderea sa slabă coincide cu închiderea slab secvenţială.

(Mazur) *O mulţime convexă într-un spaţiu Banach este slab închisă dacă şi numai dacă este tare închisă.*

Cititorul interesat poate găsi demonstraţiile rezultatelor de mai sus în [79].

Amintim că într-un spaţiu Banach X, o mulţime M este *slab secvenţial închisă* dacă pentru fiecare şir (x_n) din M, convergent slab la x_0, avem $x_0 \in M$. Mulţimea M este *slab secvenţial compactă* dacă fiecare şir în M are un subşir slab convergent la un element din M.

Amintim, de asemenea, că o funcţie $f : M \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ este *slab secvenţial inferior semicontinuă* pe M dacă, pentru orice $x \in M$ şi orice şir (x_n) din M slab convergent la x, avem

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n).$$

Spunem că f este *coercivă* atunci când, $f(x) \to \infty$ dacă $\|x\| \to \infty,\ x \in M$

Teorema 6 *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi $M \subset X$ o mulţime slab secvenţial închisă. Fie $f : M \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ o funcţie coercivă şi slab secvenţial inferior semicontinuă pe M. Atunci, f este mărginită inferior pe M şi îşi atinge infimumul. Concluzia rămâne adevărată dacă X este dualul unui spaţiu normat separabil iar convergenţa slabă se înlocuieşte cu cea slab stelată.*

Demonstraţie. Fie (x_n) un şir minimizant în M, deci $f(x_n) \to m = \inf_{x \in M} f(x)$. Din condiţia de coercivitate, şirul (x_n) este mărginit. Deoarece X este reflexiv, există un subşir al său, pe care-l vom nota tot cu (x_n), convergent slab la $x_0 \in X$. Deoarece M este slab secvenţial închisă, $x_0 \in M$. In sfârşit, din ipoteza asupra funcţiei f obţinem

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n) = m.$$

In cazul când X este dualul unui spaţiu normat, se foloseşte Teorema lui Alaoglu. Demonstraţia este încheiată. □

Observaţia 2 Teorema 6 se poate deduce din precedenta dacă se observă că, în condiţia de coercivitate, avem

$$\inf_{x \in M} f(x) = \inf_{x \in M \cap B(x_0, R)} f(x),$$

unde x_0 este un element fixat din M.

Următorul corolar pune în evidenţă situaţii care apar destul de frecvent. El se bazează pe teoremele anterioare şi pe Problema **??**. Amintim că f este *convexă* pe mulţimea convexă M dacă

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

pentru orice $x, y \in M$ şi orice $t \in [0, 1]$. Dacă inegalitatea de mai sus este strictă pentru $x \neq y$ şi $t \in (0, 1)$, atunci spunem că funcţia f este *strict convexă*. Este uşor de văzut că pentru o funcţie strict convexă există cel mult un punct de minim.

Corolarul 4 *Presupunem că una din următoarele condiţii are loc.*

(i) X este spaţiu Banach, M este slab secvenţial compactă, f este slab secvenţial inferior semicontinuă pe M;

(ii) X este reflexiv, M este convexă mărginită şi închisă, f este slab secvenţial inferior semicontinuă pe M;

(iii) X este reflexiv, M este convexă mărginită şi închisă, f este inferior semicontinuă pe M şi convexă (sau mai general, cu mulţimile de nivel convexe);

(iv) X este reflexiv, M este convexă şi închisă, f este coercivă, slab secvenţial inferior semicontinuă pe M;

(v) X este reflexiv, M este convexă şi închisă, f este coercivă, inferior semicontinuă pe M şi convexă (sau mai general, cu mulţimile de nivel convexe).

Atunci, f este mărginită inferior pe M şi îşi atinge infimumul.

Să prezentăm acum un exemplu semnificativ, şi anume *problema variaţională pătratică.* Principiul lui Dirichlet este un caz particular.

Fie X un spaţiu normat şi $a : X \times X \to \mathbf{R}$ o formă biliniară, adică liniară în fiecare argument. Spunem că forma biliniară a este:

mărginită, dacă există o constantă $k > 0$ astfel încât

$$\|a(x,y)\| \leq k \ \|x\| \ \|y\|, \quad \forall x, y \in X;$$

simetrică, dacă $a(x,y) = a(y,x)$ pentru orice $x, y \in X$;

pozitivă, dacă $0 \leq a(x,x)$ pentru orice $x \in X$;

strict pozitivă, dacă $0 < a(x,x)$ pentru $x \neq 0$;

tare pozitivă sau coercivă, dacă există o constantă $c > 0$ astfel încât

$$c\|x\|^2 \leq a(x,x), \ \ \forall x \in X.$$

Este uşor de verificat că funcţia a este continuă în ambele argumente.

Să considerăm $b \in X^*$ şi funcţionala pătratică

$$f(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - b(x),$$

căreia dorim să-i studiem existenţa minimului pe mulţimi convexe din X.

Teorema 7 *Fie X un spaţiu Banach reflexiv, $M \subset X$ o mulţime convexă şi închisă şi $a : X \times X \to \mathbf{R}$ o formă biliniară mărginită şi simetrică pe X. Presupunem că una din următoarele condiţii este adevărată.*

(i) a este pozitivă şi M este mărginită;

(ii) a este tare pozitivă.

Atunci, funcţionala pătratică f are punct de minim în M. Dacă a este strict pozitivă atunci punctul de minim este unic.

Dacă $M = X$, atunci x este punct de minim pentru f dacă şi numai dacă este soluţie a ecuaţiei variaţionale

$$a(x,y) = b(y), \ \forall y \in X.$$

Demonstraţie. Să notăm $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$, pentru $x, y \in M$ şi $t \in \mathbf{R}$ şi să observăm că

$$\varphi(t) = 2^{-1}t^2 a(y-x, y-x) + t(a(x, y-x) - b(y-x)) + 2^{-1}a(x,x) - b(x).$$

Dacă forma biliniară este pozitivă, atunci funcţia φ este convexă, deci are loc inegalitatea

$$\varphi(t) \leq (1-t)\varphi(0) + t\varphi(1), \ \ \forall t \in [0,1],$$

ceea ce conduce uşor la convexitatea funcţiei f. Dacă a este strict pozitivă, atunci f este strict convexă. Aşadar, în cazul (i) concluzia rezultă din Corolarul 4 (iii). Dacă a este tare pozitivă atunci,

$$f(x) \geq c\|x\|^2 - \|b\| \; \|x\|,$$

ceea ce implică proprietatea de coercivitate pentru f. Prin urmare, în cazul (ii) concluzia rezultă din Corolarul 4 (v). Ultima parte a teoremei rezultă din faptul că x este punct de minim pentru f dacă şi numai dacă 0 este punct de minim pentru φ, ceea ce echivalează cu $\varphi'(0) = 0$. □

Ultima parte a teoremei anterioare arată echivalenţa dintre problema de minim şi ecuaţia de tip Euler corespunzătoare. Este clar că dacă f este diferenţiabilă în punctul de minim x, interior mulţimii M, atunci în mod necesar $f'(x) = 0$. Interesant este că în cazul convex are loc şi reciproca.

Teorema 8 *Fie $f : X \to \mathbf{R}$ o funcţie diferenţiabilă Gateaux, convexă şi coercivă pe spaţiul Banach reflexiv X. Atunci problema de minim pentru f pe X este echivalentă cu ecuaţia $f'(x) = 0, \;\; x \in X$. In plus, cele două probleme au soluţie. Dacă f este strict convexă, soluţia este unică.*

Demonstraţie. Demonstraţia primei părţi se bazează pe următoarea inegalitate remarcabilă, satisfăcută de funcţiile convexe derivabile pe o mulţime convexă M.

$$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y - x \rangle, \;\; \forall x, y \in M. \tag{19}$$

Pentru demonstraţie, notăm $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$. Este clar că $\varphi : [0, 1] \to \mathbf{R}$ este convexă, derivabilă şi cu derivata crescătoare. De aici obţinem

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \geq \varphi'(0), \;\; 0 < \theta < 1, \tag{20}$$

ceea ce implică inegalitatea dorită.

Faptul că problema de minim are soluţie rezultă din Corolarul 4 (iv) şi Problemele **??** şi **??**. In esenţă, din problemele citate deducem:

O funcţie convexă şi derivabilă Gateaux este slab secvenţial inferior semicontinuă.

Demonstraţia este încheiată. □

Să revenim acum şi să aplicăm rezultatele de mai sus la Problema lui Dirichlet. Considerăm problema variaţională

$$\min 2^{-1} \int_D \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2 dx - \int_D f u dx; \;\; u = g \text{ pe } \operatorname{Fr}(D). \tag{21}$$

Aici D este o mulţime deschisă şi mărginită în $\mathbf{R}^n$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ şi $\partial_i u = \partial u / \partial \xi_i$. Impreună cu (21) să considerăm problema la limită pentru ecuaţia lui Laplace

$$-\Delta u = f \;\text{ pe }\; D; \quad u = g \;\text{ pe }\; \mathrm{Fr}(D). \tag{22}$$

După cum am precizat mai sus, important este cadrul în care se lucrează. De exemplu, dacă $g : \mathrm{Fr}(D) \to \mathbf{R}$ şi $f : \overline{D} \to \mathbf{R}$ sunt continue, atunci o funcţie $u \in C^2(\overline{D})$, soluţie pentru problema (21), este soluţie şi pentru problema (22). Dificultatea constă în obţinerea existenţei pentru problema (21). Rezultatul principal este dat de

Propoziţia 4 *Presupunem că D este mărginită şi deschisă în $\mathbf{R}^n$, $f \in L^2(D)$ şi $g \in H^1(D)$. Atunci*

(i) Problema (21) *are soluţie unică $u \in H^1(D)$;*

(ii) Aceasta este unica soluţie generalizată $u \in H^1(D)$ a problemei (22).

Aici condiţia la frontieră pentru problema (21) *este în sensul $u - g \in H_0^1(D)$ iar soluţia generalizată pentru* (22) *este în sensul*

$$\int_D \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v dx = \int_D f v dx \;\; \forall v \in H_0^1(D), \;\; u - g \in H_0^1(D).$$

Demonstraţie. Amintim că spaţiul $H_0^1(D)$ este închiderea mulţimii $C_0^\infty(D)$ în spaţiul Hilbert $H^1(D)$. Spaţiul $H^1(D)$ constă din funcţiile $u \in L^2(D)$ care au derivate generalizate $\partial_i u \in L^2(D)$ pentru $i = 1, \cdots, n$. Produsul scalar este dat de

$$\langle u, v \rangle = \int_D (uv - \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v) dx.$$

Punem $X = H_0^1(D)$ şi definim

$$a(u, v) = \int_D \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v dx, \quad b_1(v) = \int_D f v dx,$$

pentru orice $u, v \in H^1(D)$. Facem schimbarea de variabilă $w = u - g$ şi obţinem problema de minim

$$\min 2^{-1} a(w, w) - b(w), \quad w \in X,$$

unde am pus $b(w) = b_1(w) - a(w, g)$. Pentru a aplica Teorema 7, avem de verificat că forma biliniară a este mărginită şi tare pozitivă. Mărginirea rezultă uşor pe baza inegalităţii lui Schwarz. Faptul că a este tare pozitivă rezultă din inegalitatea Poincaré-Friedrichs:

Există o constantă $C > 0$ astfel încât pentru orice $u \in H_0^1(D)$ avem

$$C \int_D u^2 dx \leq \int_D \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2 dx.$$

□

Incheiem această secţiune cu un comentariu de natură istorică. Aplicarea metodelor directe din calculul variaţiilor la probleme la limită pentru ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul doi a fost făcută în 1915 de Leon Lichtenstein [59], într-o lucrare ce conţine toate ingredientele de bază ale prezentării actuale: considerarea unui şir minimizant (u_n); demonstrarea mărginirii lui (u_n) în spaţiul Sobolev $H_0^1(I)$, I fiind un interval, şi folosirea acestei mărginiri pentru a se obţine un subşir convergent la u; folosirea semicontinuităţii slabe a patratului normei din $H_0^1(I)$ pentru a arăta că u este punct de minim; folosirea ecuaţiei lui Euler pentru a arăta că soluţia (slabă) u este soluţia clasică.

0.5 Inegalităţi variaţionale

Să observăm că dacă a este punct de minim pentru funcţia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ atunci, în mod necesar avem $f'(a) \geq 0$, iar dacă b este punct de minim atunci $f'(b) \leq 0$. Prin urmare, dacă $c \in [a, b]$ este punct de minim atunci avem inecuaţia

$$f'(c)(x - c) \geq 0, \ \ \forall x \in [a, b],$$

numită în literatură *inecuaţie* sau *inegalitate variaţională*. Este uşor de văzut că rezultatul se poate extinde la spaţii Banach, pentru funcţii diferenţiabile Gateaux pe mulţimi convexe.

Este clar că, în general, dacă c este soluţie a inegalităţii variaţionale, nu rezultă că este punct de extrem pentru f. Pentru funcţii convexe avem următorul rezultat.

Teorema 9 *Fie X un spaţiu normat, $M \subset X$ o mulţime convexă şi $f : M \to X$ o funcţie convexă şi Gateaux diferenţiabilă. Atunci, x este punct de minim pentru f dacă şi numai dacă*

$$\langle f'(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in M. \tag{23}$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $\varphi(t) = f(x + t(y - x)), \ \ t \in [0, 1]$ unde $x, y \in M$ sunt fixaţi. Dacă x este punct de minim pentru f atunci $\varphi(t) \geq 0$ pentru orice $t \in [0,1]$, ceea ce implică $\varphi'(0) \geq 0$. Acest fapt conduce la (23). Reciproc, dacă x este o soluţie pentru (23), atunci $\varphi'(0) \geq 0$. Deoarece funcţia φ este convexă urmează că φ' este crescătoare, ceea ce implică (20). De aici obţinem $f(y) \geq f(x)$ pentru orice $y \in M$ şi astfel demonstraţia este încheiată. $\square$

In particular, pentru problema variaţională pătratică avem

Corolarul 5 *Fie problema de minim*

$$\min_{x \in M} \frac{1}{2} a(x,x) - b(x) = m \tag{24}$$

şi inegalitatea variaţională

$$a(x, y-x) \geq b(y-x), \quad \forall y \in M. \tag{25}$$

Dacă X este spaţiu Banach reflexiv, $M \subset X$ este convexă şi închisă, $a : X \times X \to \mathbf{R}$ este biliniară mărginită simetrică şi tare pozitivă iar $b \in X^*$ atunci, problemele (24) *şi* (25) *sunt echivalente şi au exact o soluţie.*

In plus, dacă M este con, (25) *este echivalentă cu problema*

$$a(x,x) = b(x), \ \ a(x,z) \geq b(z) \ \ \forall z \in M. \tag{26}$$

Demonstraţie. La fel ca în demonstraţia Teoremei 7 rezultă că funcţionala $f(x) = 2^{-1}a(x,x) - b(x)$ este strict convexă şi diferenţiabilă Gateaux. Concluzia primei părţi urmează combinând Teorema 7 şi Teorema 9. Când M este con convex, amintim mai întâi că dacă $u, v \in M$ atunci $u + v \in M$. Presupunem că are loc (25). Dacă punem $y = x + z$ obţinem inegalitatea din (26) iar dacă punem $y = 2x$ şi $y = 0$ obţinem egalitatea din (26). Cealaltă implicaţie este imediată, prin scădere. $\square$

Observaţia 3 Dacă luăm $a(x,y) = \langle x, y \rangle$ şi X este spaţiu Hilbert, obţinem cunoscuta caracterizare a elementului de normă minimă u într-o mulţime M convexă mărginită şi închisă: $\langle u, y-u \rangle \geq 0$ pentru orice $y \in M$.

Rezultatul de mai sus se poate aplica problemei

$$-\Delta u - cu = f \quad \text{pe} \ \ D,$$

$$u \geq 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial n} - g \geq 0, \ \ \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) u = 0 \quad \text{pe} \ \ \mathrm{Fr}(D),$$

unde $c > 0$, D este o mulţime mărginită din $\mathbf{R}^n$ cu frontiera suficient de regulată. Considerăm spaţiul $X = H_0^1(D)$, mulţimea $M = \{u \in X; u(x) \geq 0,\ a.p.t.\ x \in \mathrm{Fr}(D)\}$, forma biliniară

$$a(u,v) = \int_D \left(\sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v + cuv \right) dx$$

şi funcţionala liniară

$$b(v) = \int_{\mathrm{Fr}(D)} gvd\sigma + \int_D fvdx.$$

Condiţia $c > 0$ asigură coercivitatea. Soluţia inegalităţii variaţionale (26) dată de Corolarul 5 este tocmai soluţia generalizată a problemei considerate.

După cum se vede din Teorema 7 şi Corolarul 5, existenţa soluţiilor pentru inegalitatea variaţională (25) rezultă din existenţa soluţiilor pentru problema de minim (24). Dacă forma biliniară a nu este simetrică, atunci se poate considera inecuaţia (25) dar ea nu mai provine dintr-o problemă variaţională. In acest caz, în spaţii Hilbert se poate obţine un rezultat de existenţă pentru (25) folosind Teorema de punct fix a lui Banach. Următorul rezultat aparţine lui Guido Stampacchia [86] (1964).

Teorema 10 *Presupunem că X este spaţiu Hilbert, forma biliniară a este mărginită şi tare pozitivă, $M \subset X$ este convexă şi închisă şi $b \in X$. Atunci inegalitatea variaţională* (25) *are soluţie unică în M.*

Demonstraţie. Să observăm că, deoarece forma biliniară a este mărginită, există un unic operator liniar continuu $A : X \to X$ cu

$$a(x,y) = \langle Ax, y \rangle \quad \forall x, y \in X.$$

Fixăm $t > 0$ şi $z \in X$ şi considerăm inegalitatea variaţională

$$\langle x, y - x \rangle \geq \langle z, y - x \rangle - t(\langle z, y - x \rangle - \langle b, y - x \rangle)\ \ \forall y \in M. \tag{27}$$

Din cele de mai sus, pentru fiecare $z \in M$, problema (27) are soluţie unică în M, pe care o vom nota Fz. Vom arăta că putem alege t astfel încât operatorul $F : M \to M$ este o contracţie. Pentru aceasta, fie $z_1, z_2 \in M$ şi $x_1 = Fz_1$, $x_2 = Fz_2$. Punem $x = x_1, y = x_2$ şi apoi $x = x_2, y = x_1$ în (27) şi obţinem prin adunare

$$-\|x_1 - x_2\|^2 \geq -\langle (I - tA)(z_1 - z_2), x_1 - x_2 \rangle.$$

De aici urmează
$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(I - tA)(z_1 - z_2)\|.$$
Un calcul simplu arată că
$$\|(I - tA)u\|^2 \leq l^2 \|u\|^2,$$
pentru orice $u \in X$, unde
$$l^2 = 1 + t^2 \|A\|^2 - 2tc.$$
Aici constanta c provine din condiţia că forma patratică a este tare pozitivă: $a(x, x) \geq c\|x\|^2$ pentru orice $x \in X$. Să observăm că din condiţia aceasta rezultă şi $c \leq \|A\|$. Este clar că dacă alegem t astfel încât $0 < t < 2c/\|A\|^2$, avem $l < 1$ şi
$$\|Fz_1 - Fz_2\| \leq l\|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in M.$$
Aşadar, F are punct fix care este soluţie a inegalităţii variaţionale (25). □

Inegalitatea (25) este de forma
$$\langle A(x), y - x\rangle \geq 0, \quad \forall y \in M, \tag{28}$$
pe care o vom numi tot inegalitate variaţională chiar dacă A nu este numaidecât un operator potenţial, adică de tipul $A = f'$.

Teoria inegalităţilor variaţionale de forma (28) s-a dovedit deosebit de utilă în diverse domenii. Ea s-a dezvoltat sistematic începând cu anii 1960 prin lucrările lui Gaetano Fichera (1964, problema Signorini), Guido Stampacchia (1965, ecuaţii diferenţiale eliptice cu coeficienţi discontinui), Philip Hartman şi Guido Stampacchia, Felix Browder (1966, inegalităţi variaţionale cu operatori neliniari monotoni), Haïm Brézis (1968, inegalităţi variaţionale cu operatori pseudo-monotoni).

Să prezentăm un rezultat de existenţă pentru (28) în cazul în care M este convexă şi compactă iar A este continuă.

Teorema 11 *Fie X spaţiu Banach, $M \subset X$ o mulţime convexă şi compactă şi $A : X \to X^*$ o funcţie continuă. Atunci, inegalitatea variaţională* (28) *are cel puţin o soluţie în M.*

Demonstraţie. Se consideră funcţia $f(x, y) = -\langle A(x), y - x\rangle$ şi se aplică Teorema **??**. □

Ipoteza de compactitate a mulţimii M se poate slăbi, impunând în schimb ipoteze mai tari asupra funcţiei A. Un rezultat important în această direcţie aparţine lui Stepan Karamardian [50] publicat în 1971. Deşi rezultatul are loc în spaţii Banach reflexive, pentru a simplifica expunerea îl vom prezenta în spaţiul $\mathbf{R}^n$.

Teorema 12 *Fie M un con convex închis şi $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ continuă şi tare monotonă pe M, adică*

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq c\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in M.$$

Atunci inegalitatea variaţională (28) *are soluţie unică în M.*

Demonstraţie. Din condiţia de monotonie avem

$$\langle A(x), x\rangle \geq \langle A(0), x\rangle + c\|x\|^2, \quad \forall x \in M.$$

De aici rezultă că dacă $x \in M \setminus K$ unde

$$K = \{x \in M; \|x\| \leq \|A(0)\|/c\},$$

avem $\langle A(x), x\rangle > 0$. Pentru fiecare $y \in M$ fie

$$D_y = \{x \in K; \langle A(x), y - x\rangle \geq 0\}.$$

Mulţimile D_y sunt închise în compactul K şi vrem să arătăm că au proprietatea intersecţiei finite. Pentru aceasta, considerăm $\{y_1, \cdots, y_m\} \subset M$ şi aplicăm Teorema 11 mulţimii convexe şi compacte $D = \mathrm{co}(K \cup \{y_1, \cdots, y_m\})$. Există deci $x_0 \in D$ astfel încât are loc

$$\langle A(x_0), x - x_0\rangle \geq 0, \quad \forall x \in D.$$

In particular, $\langle A(x_0), y_i - x_0\rangle \geq 0$ pentru $i = 1, \cdots, m$ şi $\langle A(x_0), x_0\rangle \leq 0$ (deoarece $0 \in D$), şi deci $x_0 \in K$. Avem deci

$$x_0 \in \bigcap_{1 \leq i \leq m} D_{y_i}.$$

Prin urmare, familia de mulţimi închise $\{D_y; y \in M\}$ are proprietatea intersecţiei finite. Deoarece K este mulţime compactă, avem

$$\bigcap_{y \in M} D_y \neq \emptyset.$$

Este clar că orice punct al intersecţiei de mai sus este soluţie a inegalităţii variaţionale (28).

Pentru unicitate, observăm că dacă x_1 şi x_2 sunt soluţii atunci avem $\langle A(x_i), x_i\rangle = 0$, $i = 1, 2$; $\langle A(x_1), x_2\rangle \geq 0$ şi $\langle A(x_2), x_1\rangle \geq 0$. De aici obţinem

$$c\|x_1 - x_2\|^2 \leq \langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2\rangle \leq 0,$$

deci $x_1 = x_2$. Demonstraţia este astfel încheiată. $\square$

Observaţia 4 Deoarece mulţimea M este con convex, inegalitatea (28) este echivalentă cu problema

$$\langle A(x), x\rangle = 0; \ \ \langle A(x), y\rangle \geq 0, \ \ \forall y \in M.$$

In cazul în care M este conul pozitiv, adică $M = \{x \in \mathbf{R}^n; x \geq 0\}$, este uşor de văzut că problema de mai sus este echivalentă cu sistemul

$$A(x) = y; \ \ x \geq 0; \ \ y \geq 0; \ \ \langle x, y\rangle = 0,$$

care apare în diverse probleme de teoria jocurilor, mecanică, economie.

0.6 Teorema de minimax

Fie A şi B mulţimi nevide şi $f : A \times B \to \mathbf{R}$ o funcţie. Un element $(x_0, y_0) \in A \times B$ se numeşte *punct şa* pentru f dacă

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) \quad \forall (x, y) \in A \times B.$$

Condiţia de mai sus este echivalentă cu

$$\max_{y\in B} f(x_0, y) = f(x_0, y_0) = \min_{x\in A} f(x, y_0).$$

Exemplul standard este $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, cu punctul şa $(0, 0)$. Inainte de a demonstra teorema principală, să enunţăm o lemă. Vezi Problema **??** pentru demonstraţie.

Lema 1 *Funcţia f are punct şa dacă şi numai dacă are loc relaţia*

$$\min_{x\in A} \sup_{y\in B} f(x, y) = \max_{y\in B} \inf_{x\in A} f(x, y). \tag{29}$$

Dacă (x_0, y_0) este punct şa, atunci $f(x_0, y_0)$ este valoarea comună a celor două expresii din (29)*.*

Teorema care urmează, numită *Teorema de minimax*, dă condiţii de existenţaă a unui punct şa.

Teorema 13 *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi A, B submulţimi nevide convexe mărginite şi închise. Fie $f : A \times B \to \mathbf{R}$ o funcţie care verifică ipotezele* (*i*) *Funcţia* $f(\cdot, y)$ *este inferior semicontinuă şi convexă pe* A *pentru fiecare* $y \in B$;

(*ii*) *funcţia* $f(x, \cdot)$ *este superior semicontinuă şi concavă pe* B *pentru fiecare* $x \in A$.

Atunci

(*a*) *Funcţia* f *are un punct şa;*

(*b*) *Punctul* (x_0, y_0) *este punct şa pentru* f *dacă şi numai dacă are loc*

$$\min_{x\in A}\max_{y\in B} f(x,y) = \max_{y\in B}\min_{x\in A} f(x,y). \tag{30}$$

Dacă (x_0, y_0) *este punct şa pentru* f, *atunci* $f(x_0, y_0)$ *este valoarea comună a celor două expresii din* (30).

Demonstraţie. Să notăm

$$\alpha = \min_{x\in A}\max_{y\in B} f(x,y); \quad \beta = \max_{y\in B}\min_{x\in A} f(x,y).$$

Arătăm mai întâi că α şi β există. Vom face demonstraţia pentru β, pentru α fiind analog. Din Corolarul 4, pentru fiecare $y \in B$ există $z(y) \in A$ cu

$$f(z(y), y) = \min_{x\in A} f(x,y).$$

Să notăm $h(y) = -f(z(y), y)$. Reţinem inegalitatea

$$-f(x,y) \leq h(y) \quad \forall x \in A. \tag{31}$$

Vom arăta că funcţia $h : B \to \mathbf{R}$ este inferior semicontinuă şi convexă. Va exista atunci $\min_{y\in B} h(y)$ şi apoi $b = -\min_{y\in B} h(y)$. Demonstrăm că h este convexă. Din (*ii*) şi (31) avem

$$-f(x, ty_1 + (1-t)y_2) \leq -tf(x, y_1) - (1-t)f(x, y_2) \leq th(y_1) + (1-t)h(y_2).$$

pentru orice $x \in X$ deci şi pentru $x = z(ty_1 + (1-t)y_2)$. Demonstrăm acum că h este secvenţial semicontinuă inferior. Fie şirul (y_n) în B convergent la y. Din (31) avem $-f(z(y), y_n) \leq h(y_n)$. Trecem la limită şi folosim (*ii*) pentru a obţine $-f(z(y), y) \leq \liminf_{n\to\infty} h(y_n)$. Aşadar, putem aplica Corolarul 4 şi deducem că funcţia h are punct de minim pe B, deci β există şi $\beta = -\min_{y\in B} h(y)$. Analog pentru α. In continuare arătăm că $\alpha = \beta$. Este uşor de văzut că $\beta \leq \alpha$. Pentru a demonstra inegalitatea inversă, aplicăm o teoremă de punct fix, Teorema **??**. Pentru aceasta, înzestrăm X şi Y cu topologia slabă, luăm $\varepsilon > 0$, punem $s = \alpha - \varepsilon$, $t = \beta + \varepsilon$ şi construim multifunţia $F : A \times A \rightsquigarrow A \times B$,

$$F(x, y) = \{(u, v) \in A \times B; f(u, y) < t,\ f(x, v) > s\}.$$

Este uşor de văzut că F are valori nevide şi convexe. In plus, $A \times B$ este slab compactă. Rămîne să dovedim că $F^{-1}(u, v)$ este relativ slab deschisă. Acest fapt rezultă uşor din

$$F^{-1}(u, v) = \{(x, y) \in A \times B; f(u, y) < t,\ f(x, v) > s\},$$

având în vedere că mulţimile $\{x \in A; f(x, v) \leq s\}$ şi $\{y \in B; f(u, y) \geq t\}$ sunt convexe şi închise, deci slab închise în A şi respectiv B. Prin urmare, aplicăm Teorema **??** şi deducem că există un punct fix pentru F, adică $(x, y) \in F(x, y)$. Avem $\alpha - \varepsilon = s < f(x, y) < t = \beta + \varepsilon$. Cum ε este arbitrar obţinem $\alpha \leq \beta$. Demonstraţia se încheie dacă avem în vedere Lema 1. □

Observaţia 5 Concluzia teoremei anterioare are loc şi în cazul în care funcţiile $f(\cdot, y)$ şi $-f(x, \cdot)$ au mulţimile de nivel convexe, adică sunt cvasiconvexe în loc sa fie convexe.

Teorema 13 a fost demonstrată de John von Neumann [96] în $\mathbf{R}^n$ în 1928, în legătură cu teoria jocurilor creată de el. Cazul general aparţine lui Ky Fan (1952).

Teoria jocurilor constă în determinarea unei balanţe optimale la o competiţie între mai mulţi parteneri. Să considerăm doi jucători P şi Q care au la îndemână cîte o mulţime de strategii A şi B. Dacă P alege strategia $x \in A$ iar Q alege strategia $y \in B$, notăm $f(x, y)$ pierderea lui P şi deci câştigul lui Q. Dacă (x_0, y_0) este punct şa pentru f, avem

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) \quad \forall (x, y) \in A \times B.$$

Dacă P alege strategia x_0, atunci câştigul lui Q este cel mult egal cu $f(x_0, y_0)$ şi maximul va fi realizat dacă Q alege strategia y_0. Invers, dacă Q alege strategia y_0, pierderea lui P este cel puţin egală cu $f(x_0, y_0)$ şi minumul va fi realizat dacă P alege strategia x_0. Prin urmare, strategia (x_0, y_0) asigură balanţa optimală a intereselor celor doi jucători. Din acest motiv, punctul şa (x_0, y_0) al funcţiei f se numeşte *strategie optimală*. Teorema 13 oferă condiţii de existenţă a strategiilor optimale. Dacă mulţimile A şi B sunt finite şi au mai multe elemente, nu sunt convexe şi deci teorema nu se aplică. Totuşi von Neumann a rezolvat acest inconvenient astfel: se introduce un factor probabilistic, adică jucătorii fac alegerea pe baza unor probabilităţi fixe. Mai precis, preupunem că P are strategiile $a_1, \cdots, a_n$ iar Q are strategiile $b_1, \cdots, b_m$. Jucătorul P alege strategia a_i cu probabilitatea p_i iar Q alege strategia b_j cu probabilitatea q_j. Considerăm mulţimile

$$A = \{p \in \mathbf{R}^n; 0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

$$B = \{q \in \mathbf{R}^m; 0 \leq q_j \leq 1, \sum_{j=1}^{m} q_j = 1\},$$

şi definim funcţia $F : A \times B \to \mathbf{R}$ prin

$$F(p, q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(a_i, b_j) p_i q_j.$$

Perechea (p, q) se numeşte *strategie mixtă* iar $F(p, q)$ reprezintă cîştigul sperat de jucătorul Q. Consideraţii probabilistice arată că $F(p, q)$ este media câştigurilor lui Q dacă se joacă de multe ori.

Este clar că sunt îndeplinite ipotezele din Teorema 13, deci putem afirma că există o strategie mixtă optimală (p_0, q_0) şi are loc egalitatea

$$F(p_0, q_0) = \min_{p \in A} \max_{q \in B} F(p, q) = \max_{q \in B} \min_{p \in A} F(p, q).$$

0.7 Controlabilitate şi timp optimal pentru sisteme semiliniare

In această secţiune ne ocupăm de problema controlabilităţii în timp optimal pentru sistemul descris de ecuaţia

$$y'(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u(t) \tag{32}$$

unde operatorul A generează un semigrup de clasă C_0, $S(t)$, $t \geq 0$, pe spaţiul Banach reflexiv X, f este o funcţie lipschitziană şi $u(\cdot)$ este un control ce ia valori în $U = B(0, r)$.

Problema timpului optimal constă în a atinge o mulţime ţintă $\mathcal{T}$ în timp minim pornind dintr-un punct iniţial x şi folosind controale admisibile, $u(\cdot)$, adică funcţii măsurabile de la $[0, \infty)$ la U. Vom considera aici cazul când ţinta este $\mathcal{T} = \{0\}$.

Pentru un control admisibil $u(\cdot)$, considerăm soluţia ecuaţiei (32) care satisface condiţia iniţială $y(0) = x$, adică, funcţia $y \in C([0, \infty), X)$ care satisface

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t - s)[f(y(s) + u(s)]ds. \tag{33}$$

Conform Teoremei **??**, pentru fiecare control u soluţia există şi este unică. Numim această soluţie traiectorie a sistemului (32) şi o notăm $y(\cdot, x, u)$. Pentru $t \geq 0$ considerăm mulţimea de controlabilitate la timpul t

$$\mathcal{R}(t) = \{x \in X; y(t, x, u) = 0 \text{ pentru un control admisibil } u(\cdot)\},$$

mulţimea de controlabilitate

$$\mathcal{R} = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{R}(t)$$

şi funcţia timp optimal (funcţia lui Bellman) $T : \mathcal{R} \to [0, \infty)$

$$T(x) = \inf \{t; x \in \mathcal{R}(t)\}.$$

Un control pentru care infimumul se atinge se numeşte *optimal* pentru x. Teorema următoare pune în evidenţă condiţii suficiente de existenţă a controalelor optimale.

Teorema 14 *Dacă X este reflexiv şi separabil iar semigrupul $S(t)$ este compact, atunci pentru fiecare $x \in \mathcal{R}$ există cel puţin un control optimal. In cazul liniar (f=0), proprietatea are loc fără condiţia ca semigrupul să fie compact.*

Demonstraţie. Fie (u_n) un şir de controale admisibile şi un şir (t_n) descrescător şi convergent la $T(x)$ cu proprietatea $y(t_n, x, u_n) = 0$. Extindem u_n pe $[0, t_1]$ punând $u_n(s) = 0$ pentru $s \in (t_n, t_1)$. Conform teoremei lui Alaoglu, şi ţinând cont de separabilitatea lui X şi deci a lui $L^1(0, t; X)$ putem presupune că u_n converge slab-stelat în $L^\infty(0, t; X)$ la un control admisibil u. Mai departe argumentele sunt diferite. Dacă $f = 0$, se ia $x^* \in X^*$, se scrie

$$\langle x^*, y(t_n, x, u_n)\rangle = \langle x^*, S(t_n)x\rangle + \int_0^{t_1} \langle S^*(t_n - t)x^*, u_n(t)\rangle dt.$$

Trecând la limită cu $n \to \infty$, eventual pe un subşir, ajungem la $y(T(x), x, u) = 0$. In cazul general, se foloseşte compactitatea operatorului

$$\varphi \mapsto \int_0^t S(t-s)\varphi(s)ds$$

(vezi Observaţia **??**) pentru a trece la limită. □

O proprietate remarcabilă a funcţiei timp optimal este dată de principiul programării dinamice al lui Bellman. Comentarii asupra acestui principiu vor fi făcute la sfârşitul acestei secţiuni.

Pentru orice $x \in \mathcal{R}$ *şi orice control* u,

$$T(x) \le t + T(y(t,x,u)) \tag{34}$$

pentru orice $t > 0$ *pentru care* $y(t,x,u) \in \mathcal{R}$, *cu egalitate în cazul când* u *este optimal.*

Demonstraţia acestui rezultat va fi dată în Teorema 17.

In cele ce urmează vom pune în evidenţă câteva proprietăţi ale mulţimii de controlabilitate şi ale funcţiei timp optimal. Să prezentăm mai întâi o lemă în care evidenţiem proprietăţi ale traiectoriilor sistemului (32). Peste tot în această secţiune presupunem că f este L-lipschitziană pe X, $f(0) = 0$ iar ω este o constantă pentru care $\|S(t)\| \le e^{\omega t}$ pentru orice $t > 0$. In general, semigrupul verifică o inegalitate de forma $\|S(t)\| \le Me^{\omega t}$, inegalitate care se poate reduce la cazul $M = 1$ prin considerarea unei norme echivalente cu cea iniţială.

Lema 2 (a) *Pentru orice* $x \in X$ *şi orice control* u *avem*

$$\|y(t,x,u)\| \le e^{(L+\omega)t}\left(\|x\| + \frac{r}{L+\omega}\right) - \frac{r}{L+\omega} \quad \forall t \ge 0.$$

In cazul $L + \omega = 0$ *membrul drept al inegalităţii de mai sus este* $\|x\| + rt$.

(b) *Pentru orice* $x, z \in X$ *şi orice control* u *avem*

$$\|y(t,x,u) - y(t,z,u)\| \le e^{(L+\omega)t}\|x - z\| \quad \forall t \ge 0. \tag{35}$$

Demonstraţie. Demonstraţia se bazează pe inegalitatea lui Gronwall:

Fie φ, h *şi* k *funcţii date de la* $[\,t_0, T)$ *în* $\mathbf{R}$, *unde* $T \le +\infty$. *Dacă* φ *este continuă,* $h \in L^\infty_{\text{loc}}([\,t_0,T))$, $k \in L^1_{\text{loc}}([\,t_0,T);\mathbf{R}_+)$ *şi*

$$\varphi(t) \le h(t) + \int_{t_0}^t k(s)\varphi(s)ds$$

pentru orice $t \in [\,t_0, T)$, *atunci*

$$\varphi(t) \le h(t) + \int_{t_0}^t h(s)k(s)\exp\left(\int_s^t k(u)du\right)ds$$

pentru orice $t \in [\,t_0, T)$, *unde* $\exp(a) = e^a$.

Pentru demonstraţia primei părţi a lemei, se aplică inegalitatea lui Gronwall pentru funcţiile $\varphi(t) = e^{-\omega t}\|y(t,x,u)\|$, $h(t) = \|x\| + (r/\omega)(1 - e^{-\omega t})$ şi $k(t) = L$. Pentru (b), $\varphi(t)$ şi $k(t)$ sunt ca mai sus iar $h(t) = \|x - z\|$. $\square$

Propoziţia 5 *Fie $R \geq 0$ astfel încât $(L+\omega)R < r$.*

(i) In cazul $L+\omega > 0$, pentru orice $x \in X$ cu

$$R < \|x\| < r/(L+\omega),$$

există un control u^* astfel încât traiectoria $y(t,x,u^*)$ atinge $B(0,R)$ în timp finit şi satisface inegalitatea

$$\|y(t,x,u^*)\| \leq e^{(L+\omega)t}\left(\|x\| - \frac{r}{L+\omega}\right) + \frac{r}{L+\omega} \tag{36}$$

pentru orice

$$0 \leq t \leq \tilde{t} \leq \frac{1}{L+\omega} \log \frac{\frac{r}{L+\omega} - R}{\frac{r}{L+\omega} - \|x\|},$$

unde $\tilde{t}$ este cel mai mic t pentru care $y(t,x,u^*) \in B(0,R)$.

(ii) In cazul $L+\omega \leq 0$, proprietatea de mai sus are loc pentru orice $x \in X$ iar inegalitatea din (36) *se rescrie*

$$\|y(t,x,u^*)\| \leq \|x\| - rt \tag{37}$$

pentru orice

$$0 \leq t \leq \tilde{t} \leq (\|x\| - R)r^{-1}.$$

Demonstraţie. (i) Considerăm întâi $R > 0$ şi funcţia

$$F_R(y) = \begin{cases} -\frac{r}{R}y & \text{dacă } \|y\| \leq R \\ -r\frac{y}{\|y\|} & \text{dacă } \|y\| \geq R, \end{cases}$$

Observăm că este lipschitziană şi considerăm ecuaţia

$$y'(t) = Ay(t) + f(y(t)) + F_R(y(t)) \qquad t > 0. \tag{38}$$

Pentru $x \in D(A)$, pe fiecare interval $I = [0,T]$, ecuaţia (38) are o soluţie unică satisfăcând $y(0) = x$. Mai mult, ea este soluţie clasică (vezi Teorema **??**), adică $y \in C^1(I;X)$ şi satisface (38) pe I.

Inmulţim ecuaţia (38) cu $y(t)$ şi obţinem

$$\|y(t)\|\frac{d}{dt}\|y(t)\| \leq (L+\omega)\|y(t)\|^2 - r\,\|y(t)\|,$$

pentru $t \in [0,\tilde{t}]$, unde $\tilde{t}$ este maximum valorilor lui t pentru care $y(t) \notin B(0,R)$. Obţinem

$$\|y(t)\| \leq \|x\| - rt + (L+\omega)\int_0^t \|y(s)\|\,ds, \qquad \forall t \in [0,\tilde{t}],$$

care, în cazul $L + \omega \leq 0$ implică (37) şi, în cazul $L + \omega > 0$ implică (36) pe baza inegalităţii lui Gronwall. Este clar că există un $\tilde{t}$ ca mai sus fiindcă, altfel, lucrăm pe orice $[0, T]$ şi (36) sau (37) forţează existenţa unui $\tilde{t}$. Prin urmare (36) şi (37) au fost demonstrate pentru $x \in D(A)$. Prin densitate, ele au loc pentru orice for $x \in X$. Controlul cerut este

$$u^*(t) = -ry(t)/|y(t)|. \tag{39}$$

In cazul $R = 0$, observăm că dacă $R_1 < R_2$ atunci avem $\tilde{t}_1 > \tilde{t}_2$ iar soluţiile corespunzătoare $y_1(\cdot)$ şi $y_2(\cdot)$ satisfac

$$y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \in [0, \tilde{t}_2].$$

Cu alte cuvinte, traiectoriile ecuaţiei (38) nu depind de $R > 0$ până ating $B(0, R)$. Luăm un şir R_n descrescător şi convergent la 0 şi obţinem un şir $\tilde{t}_n$ crescător şi convergent la $\bar{t}$ care satisface inegalităţile cerute la (i) sau (ii). Demonstraţia se încheie considerând controlul dat de (39) pe $[0, \bar{t}]$. □

Teorema 15 *(i) Mulţimea de controlabilitate $\mathcal{R}$ este deschisă şi funcţia timp optimal este local lipschitziană pe $\mathcal{R}$. Mai precis, avem*

(ii) In cazul $L + \omega > 0$, pentru orice $\rho \in (0, r/(L + \omega))$ avem

$$T(x) \leq \frac{\|x\|}{r - \rho(L + \omega)}$$

pentru x satisfăcând $\|x\| \leq \rho$. Notând

$$\gamma = \frac{1}{r - \rho(L + \omega)},$$

dacă $x \in \mathcal{R}$ şi z este astfel încât

$$\|z - x\| \leq \rho\, e^{-(L+\omega)T(x)},$$

atunci $z \in \mathcal{R}$ şi

$$T(z) \leq T(x) + \gamma\, e^{(L+\omega)T(x)} \|x - z\|.$$

(iii) In cazul $L + \omega \leq 0$ avem $\mathcal{R} = X$ şi

$$T(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$$

pentru orice $x \in X$. Mai mult, pentru orice $x, z \in X$ avem

$$|T(z) - T(x)| \leq \frac{1}{r}\|x - z\|.$$

(iv) Pentru orice $x \in \mathcal{R}$ şi $z \notin \mathcal{R}$ avem

$$T(x) \geq -\frac{1}{L+\omega} \log \frac{\|x - z\|}{\rho}.$$

In particular,

$$\lim_{z \to x} T(z) = \infty \quad \forall x \in \mathrm{Fr}\mathcal{R}. \tag{40}$$

Demonstraţie. Punctul (i) rezultă din celelalte. Să demonstrăm (ii). Observăm mai întâi că, din Propoziţia 5, avem

$$T(x) \leq \frac{1}{L+\omega} \log \frac{\frac{r}{L+\omega} - R}{\frac{r}{L+\omega} - \|x\|},$$

ceea ce, printr-un calcul elementar, conduce uşor la prima parte a concluziei. Mai departe, pentru simplificarea expunerii, presupunem existenţa controalelor optimale. In cazul general, concluzia se obţine printr-un procedeu de aproximare.

Deoarece $y(T(x), x, u) = 0$, din (35) deducem

$$\|y(T(x), z, u)\| \leq e^{(L+\omega)T(x)}\|x - z\| \leq \rho,$$

deci $y(T(x), z, u) \in \mathcal{R}$ ceea ce implică $z \in \mathcal{R}$ şi

$$T(y(T(x), z, u)) \leq \gamma e^{(L+\omega)T(x)}\|x - z\|.$$

Aplicăm acum principiul programării dinamice (34) şi obţinem concluzia dorită. Un argument similar dă (iii). Pentru a demonstra (iv), observăm că suntem în situaţia când $L + \omega > 0$. Prin reducere la absurd, presupunem că

$$(L+\omega)T(x) < -\log\|x - z\|/\rho.$$

Avem

$$\|x - z\| < \rho\, e^{-(L+\omega)T(x)},$$

ceea ce, folosind (ii), implică $z \in \mathcal{R}$. □

Observaţia 6 Teorema de mai sus arată că

$$\lim_{z\to 0} T(z) = 0. \tag{41}$$

Următoarea teoremă arată că dacă semigrupul $S(t)$ este compact atunci funcţia timp optimal este secvenţial slab continuă. Pentru aceasta folosim următorul rezultat.

Lema 3 *Presupunem că X este spaţiu Banach, f este lipschitziană pe X şi $S(t)$ este semigrup compact. Fie $0 < a < t$, (x_n) un şir slab convergent la x şi (u_n) slab convergent la u în $L^2(0, t; X)$. Atunci,*

$$y(\cdot, x_n, u_n) \to y(\cdot, x, u)$$

în $C([a, t]; X)$, cel puţin pe un subşir.

Demonstraţie. Demonstraţia este standard şi se bazează pe compactitatea operatorului

$$\varphi \mapsto \int_0^s S(s-\tau)\varphi(\tau)\, d\tau$$

de la $L^2(0, T; X)$ la $C([0, T]; X)$. Vezi Observaţia **??**. □

Teorema 16 *Presupunem că semigrupul $S(t)$ este compact. Atunci, pentru $R \geq 0$ au loc următoarele proprietăţi.*

(i) Dacă $x \in \mathcal{R}$ şi $x_n \to x$ slab, atunci pentru n suficinet de mare avem $x_n \in \mathcal{R}$. Mai mult, $T(x_n) \to T(x)$.

(ii) Pentru orice $x \notin \mathcal{R}$ şi pentru orice şir (x_n) slab convergent la x avem

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = \infty.$$

Demonstraţie. Pentru a demonstra prima parte din (i), luăm $\varepsilon > 0$ suficient se mic astfel încât

$$y(\varepsilon, x, 0) \in \mathcal{R}$$

(acest fapt este posibil deoarece $\mathcal{R}$ este mulţime deschisă), luăm $u_n = 0$ şi, din Lema 3, deducem că pe un subşir avem

$$y(\varepsilon, x_n, 0) \in \mathcal{R}$$

pentru n suficient de mare. Asta implică faptul că pe un subşir avem $x_n \in \mathcal{R}$ pentru n suficient de mare. Deci orice şir slab convergent la x are un subşir în $\mathcal{R}$ (slab convergent la x), ceea ce arată că prima parte din (i) are loc. In continuare, luăm

$$T^* = \limsup_{n\to\infty} T(x_n),$$

luăm un subşir (x_{n_k}) astfel încât $T(x_{n_k}) \to T^*$ şi fixăm $\varepsilon > 0$. Din Lema 3, putem presupune (extragând eventual un subşir) că

$$y(\varepsilon, x_{n_k}, 0) \to y(\varepsilon, x, 0).$$

Deci

$$T(y(\varepsilon, x_{n_k}, 0)) \to T(y(\varepsilon, x, 0)).$$

Folosim principiul programării dinamice (34) şi obţinem

$$T(x_{n_k}) \leq \varepsilon + T(y(\varepsilon, x_{n_k}, 0)),$$

deci

$$T^* \leq \varepsilon + T(y(\varepsilon, x, 0)).$$

Trecem la limită cu $\varepsilon \to 0$ şi obţinem

$$\limsup_{n\to\infty} T(x_n) \leq T(x).$$

Am arătat aşadar că funcţia $T(\cdot)$ este secvenţial superior semicontinuă. Să demonstrăm acum că $T(\cdot)$ este secvenţial inferior semicontinuă în $x \in \mathcal{R}$. Luăm

$$T^\# = \liminf_{n\to\infty} T(x_n)$$

şi un subşir (x_{n_k}) astfel încât $T(x_{n_k}) \to T^\#$. Intr-o primă etapă, presupunem că $T^\# > 0$. Fixăm $0 < \varepsilon < T^\#$ şi luăm u_{n_k} controlul optimal pentru x_{n_k}. Pe baza Lemei 3, putem presupune că există un control u astfel încât

$$y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k}) \to y(\varepsilon, x, u),$$

tare. Folosim din nou principiul programării dinamice şi deducem

$$T(x_{n_k}) = \varepsilon + T(y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k})).$$

De aici obţinem

$$T(y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k})) \leq M$$

pentru un $M > 0$. Fie k_0 astfel încât

$$|y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k}) - y(\varepsilon, x, u)| \leq \rho\, e^{-(L+\omega)M}$$

pentru $k > k_0$. Din Teorema 15 obţinem $y(\varepsilon, x, u) \in \mathcal{R}$ şi

$$T(y(\varepsilon, x, u)) \leq -T(y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k})) + \gamma\, e^{(L-\omega)M} |y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k}) - y(\varepsilon, x, u)|$$

pentru $k > k_0$. Prin urmare,

$$T(x_{n_k}) = \varepsilon + T(y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k}))$$
$$\geq \varepsilon + T(y(\varepsilon, x, u)) - \gamma\, e^{(L-\omega)M} |y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k}) - y(\varepsilon, x, u)|.$$

Facem $n \to \infty$ şi apoi $\varepsilon \to 0$ şi obţinem

$$\liminf_{n \to \infty} T(x_n) \geq T(x).$$

In etapa următoare presupunem $T^{\#} = 0$ şi demonstrăm $T(x) = 0$. Pentru aceasta, luăm $\varepsilon > 0$ şi pentru fiecare x_{n_k} luăm un control v_k pe $[0, \varepsilon]$ definit după cum urmează: pe $[0, T(x_{n_k})]$, v_k egalează controlul optimal iar pe $[T(x_{n_k}), \varepsilon]$, v_k este un control care forţează traiectoria să rămână în $B(0, R)$. Acest fapt este posibil din cauza Propoziţiei 5. De fapt, putem atinge originea şi apoi rămînem acolo deoarece $f(0) = 0$. Deoarece,

$$y(\varepsilon, x_{n_k}, v_k) \to y(\varepsilon, x, u)$$

pentru un control u, deducem

$$y(\varepsilon, x, u) \in B(0, R)$$

deci $T(x) \leq \varepsilon$. Cum acest fapt are loc pentru orice $\varepsilon > 0$ deducem $T(x) = 0$.

Pentru a demonstra (ii), considerăm $x \notin \mathcal{R}$, considerăm un şir (x_n) în $\mathcal{R}$ slab convergent la x şi presupunem, prin reducere la absurd, că

$$\liminf_{n \to \infty} T(x_n) < \infty.$$

Raţionăm ca în demonstraţia semicontinuităţii inferioare şi deducem

$$y(\varepsilon, x, u) \in \mathcal{R}.$$

Deci $x \in \mathcal{R}$. Contradicţia la care am ajuns arată că

$$\liminf_{n \to \infty} T(x_n) = \infty,$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Revenim acum la principiul programării dinamice. Presupunem că pentru fiecare $x \in \mathcal{R}$ există un control optimal. Vezi Teorema 14.

Teorema 17 *O funcţie $T : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ este funcţia timp optimal dacă şi numai dacă satisface următoarele condiţii:*

(i) *Pentru orice $x \in \mathcal{R}$ există un control u şi $\sigma > 0$ astfel încât*

$$T(y(t,x,u)) \leq T(x) - t \quad \forall t \in [0,\sigma);$$

(ii) *Pentru orice $x \in \mathcal{R}$, orice control u şi orice $t \geq 0$ pentru care $y(t,x,u) \in \mathcal{R}$ avem*

$$T(y(t,x,u)) \geq T(x) - t;$$

(iii) $\lim_{z\to 0} T(z) = 0$*;*

(iv) $\lim_{z\to x} T(z) = \infty \quad \forall x \in \mathrm{Fr}\mathcal{R}$*;*

(v) *Funcţia T este mărginită inferior.*

Demonstraţie. Funcţia timp optimal verifică (iii), (iv) pe baza Teoremei 15 şi (v). Să arătăm că satisface (i). In primul rând trebuie observat că dacă $y(t,x,u) \in \mathcal{R}$ atunci $x \in \mathcal{R}$. Considerăm u controlul optimal pentru x şi $\sigma = T(x)$. Luăm $t \in [0,\sigma)$ şi observăm că

$$y(T(x) - t, y(t,x,u), u) = 0$$

de unde rezultă (i). Pentru (ii), luăm $x \in \mathcal{R}$, un control oarecare u şi $y(t,x,u) \in \mathcal{R}$. Fie v un control optimal pentru $y(t,x,u)$. Se verifică uşor că

$$y(s, y(t,x,u), v) = y(t+s, x, w)$$

pentru $s > 0$, unde $w(\theta) = u(\theta)$ pentru $\theta \in (0,t)$ şi $w(\theta) = v(\theta - t)$ pentru $\theta \in (t, t+s)$. Cum $y(T(y(t,x,u)), y(t,x,u), v) = 0$, obţinem $y(t+T(y(t,x,u)), x, w) = 0$ deci

$$T(x) \leq t + T(y(t,x,u)).$$

Să demonstrăm acum reciproca. Intr-o primă etapă, arătăm că putem înlocui (i) cu

(vi) *Pentru orice $x \in \mathcal{R}$ există un control u şi $\sigma \in (0,\infty)$ astfel încât $y(\sigma,x,u) = 0$ şi $T(y(t,x,u)) \leq T(x) - t$ pentru orice $t \in [0,\sigma)$.*

Să demonstrăm acest fapt. Restrângem sistemul de control la mulţimea $\mathcal{R} \setminus \{0\}$, folosim Principiul Brezis-Browder (Teorema 1) şi deducem că există o traiectorie saturată $y(t, x, u)$ definită pe $[0, \sigma)$ care sa verifice (i). Dar, din (v) rezultă că σ este finit iar din (iv) rezultă că

$$y(\sigma, x, u) \notin \mathrm{Fr}\mathcal{R}.$$

Rămâne $y(\sigma, x, u) = 0$, deci (vi) are loc.

Să presupunem că avem o funcţie, s-o notăm cu T_1, care verifică (vi), (ii), (iii), (iv) şi (v). Facem $t \to \sigma$ în (vi), folosim (iii) (deci $T(y(\sigma, x, u)) = 0$) şi obţinem $T_1(x) \geq \sigma \geq T(x)$.

Luăm în (ii) toate traiectoriile care ating ţinta şi obţinem $T_1(x) \leq T(x)$. $\square$

Funcţia *valoare* (în cazul nostru funcţia timp optimal) într-o problemă generală de control este utilă în obţinerea unei legi de feedback care să dea traiectoria optimală. Această metodă generală de rezolvare a problemelor de control se numeşte metoda programării dinamice. Funcţia valoare este soluţia unei ecuaţii cu derivate parţiale de tip Hamilton-Jacobi care în cazul problemei timpului optimal se numeşte ecuaţia lui Bellman. Cititorul interesat poate consulta [12] pentru rezultate în această direcţie. In studiul existenţei şi unicităţii ecuaţiei lui Bellman, ca de altfel a oricărei ecuaţii care provine dintr-o problemă de control optimal, principiul de optimalitate al lui Bellman joacă un rol central. El a fost formulat în 1953 de Richard Bellman.

Bibliografie

[1] Aubin J.-P., Cellina A., *Differential Inclusions,* Springer-Verlag, 1984.

[2] Aubin J.-P., Frankowska H., *Set-Valued Analysis,* Birkhäuser, 1990.

[3] Arzelà C., Funzioni di linee, Atti della R. Accad. dei Lincei Rendiconti della Cl.Si. Fis. mat. Nat., (4) 5, 1889, 342-348

[4] Ascoli G., Le curve limite di una varieta data di curve, Atti della R. Accad. dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 18, 1882-1883, 521-586.

[5] Baire L. R., Sur les functions de variable réelles, Ann. Mat. Pura Appl., (3) 3, 1899, 1-222.

[6] Banach S., Sur les opéerations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales, Fund. Math., 3, 1922, 133-181.

[7] Banach S., Sur les functionelles linéaires, Studia Math., 1, 1929, 211-216 şi 223-239.

[8] Banach S., Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Math., 3, 1931, 174-179.

[9] Banach S., *Théorie des Opérations linéaires*, Monografje matematyczne, Warsaw, 1932.

[10] Banach S, Steinhaus H., Sur le principe de la condensation de singularités, Fund. Math., 9, 1927, 50-61.

[11] Barbu V., *Semigrupuri de Contracţii Neliniare în Spaţii Banach*, Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[12] Barbu V., Metode Matematice în Optimizarea Sistemelor Diferenţiale, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[13] Bebernes J. W., Schuur J.D., The Ważewski topological method for contingent equations, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 87, 1970, 271-279.

[14] Begle E. G., A fixed point theorem, Ann. of Math., (2) 51, 1950, 544-550.

[15] Bielecki A., Une remarque sur la méthode de Banach- Caccioppoli-Tikhonov dans la théorie des équations differentielles ordinaires, Bull. Acad. Polon Sci. Cl. III, 4, 1956, 261-264.

[16] Birkhoff G. D., Proof of Poincaré's geometric theorem, Trans. Amer. Math. Soc., 14, 1913, 14-22.

[17] Birkhoff G. D., Kellogg O. D., Invariant points in functin space, Trans. Amer. Math. Soc., 23, 1922, 96-115.

[18] Blair C. E., The Baire category theorem implies the principle of dependent choices, Bull. Acad. Polon. Sci., 25, 1977, 933-934.

[19] Bohnenblust H., Karlin S., On a theorem of Ville, In: Contributions to the theory of games, Kuhn and Tucker Eds., 155-160, University Press, Princeton, 1950.

[20] Borsuk K., Sur les rétractes, Fund. Math., 17, 1931, 152-170.

[21] Brézis H., Browder F., A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis, Adv. in Mathematics, 21, 1976, 355-364.

[22] Brown R.F., Elementary cosequences of the noncontractibility of the circle, Amer. Math. Monthly, 81, 1974, 247-252.

[23] Browder F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177, 1968, 283-301.

[24] Brouwer L.E.J., Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 71, 1912, 97-115.

[25] Caccioppoli R., Una teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale, Ren. Accad. Naz Lincei, 11, 1930, 794-799.

[26] Cazenave T., Haraux A., *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[27] Cârjă O., Ursescu C., The characteristics method for a first order partial differential equation, An. Şti. Univ. "Al.I.Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat., 39, 1993, 367 - 396.

[28] Cârjă O., Vrabie I. I., Some new viability results for semilinear differential inclusions, NoDEA, 4, 1997, 401-424.

[29] Cellina A., Approximation of set-valued functions and fixed points theorems, Ann. Mat. Pura Appl., 82, 1969, 17-24.

[30] Costinescu O., *Elemente de topologie generală*, Editura tehnică, Bucureşti, 1969.

[31] Deimling K., *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, 1992.

[32] Dieudonné J.A., Une généralisation des espaces compactes, J. Math. Pures Appl., 23, 1944, 65-76.

[33] Dugundji J., An extension of Tietze's theorem, Pacific J. Math., 1, 1951, 353-367.

[34] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[35] Ekeland I., On the variational principle, J. Math. Anal. Appl., 74, 1974, 324-353.

[36] Feferman S., Independence of the axiom of choice from the axiom of independence choices, J. Sym. Logic, 29, 1967, 226.

[37] Gheorghiu N., *Introducere în Analiza Funcţională,* Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[38] Glicksberg I.L., A further generalization of the Kakutani fixed theorem, with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. Math. Soc., 3, 1952, 170-174.

[39] Goursat E., Sur la théorie des fonctions implicites, Bull. Soc. Math. France, 31, 1903, 184-192.

[40] Graves L.M., Some mapping theorems, Duke Math. J., 17, 1950, 111-114.

[41] Gröger K., A simple proof of the Brouwer fixed point theorem, Math. Nachr., 102, 1981, 293-295.

[42] Hahn H., Über Folgen linearen Operationen, Monatsh. math. Phys., 32, 1922, 3-88.

[43] Halmos P., Vaughan H., The marriage problem, 72, 1950, 214-215.

[44] Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Verlag von Veit, Leipzig, 1914.

[45] Hill L.S., Properties of certain aggregate functions, Amer. J. Math., 49, 1927, 419-432.

[46] Hildebrandt T. H., On uniform limitedness of sets of functional operators, Bull. Amer. Math. Soc., 29, 1923, 309-315.

[47] Holmes R., *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer, 1975.

[48] Kakutani S., A generalization of Brouwer's fixed-point theorem, Duke Math. J., 8, 1941, 457-459.

[49] Kantorovici L.V., Akilov G.P., *Analiză Funcţională,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[50] Karamardian S., Generalized complementarity problem, J. Optim. Theory Appl., 8, 1971, 161-168.

[51] Kelley J.L., The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, Fund. Math., 37, 1950, 75-76.

[52] Klein E., Thompson A.C., *Theory of Correspondences*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[53] Kuratowski K., Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés, Fund. Math., 18, 1932, 148-180.

[54] Kuratowski K., *Topology*, Academic Press, New York, 1966.

[55] Ky Fan, Fixed-point and minimax theorems in locally convex linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., 38, 1952, 121-126.

[56] Ky Fan, A minimax inequality and applications, in: Inequalities III, 103-113, Academic Press, New York, 1972.

[57] Ky Fan, Glicksberg I., Some geometric properties of the spheres in a normed linear space, Duke Math. J., 25, 1958, 553-568.

[58] Leray J, Schauder J., Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 51, 1934, 45-78.

[59] Lichtenstein L., Über einige Existenzprobleme der Variationsrehnung. Methode der unendlichvielen Variabeln, J. Reine Angew. Math., 145, 1915, 24-85.

[60] Lifshits E.A., Ideally convex sets, Funct. Anal. Appl., 4, 1970, 330-331, tradus din Funkts. Anal. Prilozh., 4, 1970, 76-77

[61] Lindenstrauss J, Tzafriri L, On the complemented subspaces problem, Israel J. Math., 9, 1971, 263-269.

[62] Lyusternik L.A., Conditional extrema of functionals, Mat. Sb., 41, 1934, 390-401.

[63] Marchaud A., Sur les champs continus de demi-cones convex et leur integrales, Comp. math., 3, 1936, 89-127.

[64] Megginson R. E., *An Introduction to Banach Spaces Theory*, Springer, 1998.

[65] Michael E., Continuous selections I, Ann. Math., 63, 1956, 361-382.

[66] Michael E., Continuous selections II, Ann. Math., 64, 1956, 562-580.

[67] Miranda C., Un'osservazione su un teorema di Brouwer, Boll. Un. Mat. Ital., (2) 3, 1940, 527.

[68] Moore R. L., Concerning upper semicontinuous collections of continua, Trans. Amer. Math. Soc., 27, 1925, 416-428.

[69] Moore E. H., Smith H. L., A general theory of limits, Amer. J.Math., 44, 1922, 102-121.

[70] Nadler S. B. Jr., Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math., 30, 1969, 475-488.

[71] Nagumo M., Über die Lage der Integralkurven gewönlicher Differentialgleichungen, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 24, 1942, 551-559.

[72] Ostrowski A.M., The round-off stability of iterations, Z. Angew. Math. Mech., 47, 1967, 77-81.

[73] Phillips R. S., On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 48, 1940, 516-541.

[74] Picard E., Mémoire sur la théorie des équations aux dérivés partielles et la méthode des approximations successives, J. Math. Pures Appl. 6, 1890, 145-210.

[75] Picone M., *Lezioni di analizi infinitesimale*, vol. 1, Circolo Matematico di Catania, Catania, Italy, 1923.

[76] Popa E., *Culegere de Probleme de Analiză Funcţională,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[77] Precupanu A., *Analiză Matematică. Funcţii Reale,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

[78] Precupanu A., *Bazele Analizei Matematice,* Editura Universităţii "Al.I.Cuza" Iaşi, Iaşi, 1993.

[79] Precupanu T., *Spaţii Liniare Topologice şi Elemente de Analiză Convexă,* Editura Academiei, Bucureşti, 1992.

[80] Robinson S., Regularity and stability for convex multivalued functions, Math. Oper. Res., 1, 1976, 130-143.

[81] Rudin M.E., A new proof that metric spaces are paracompact, Proc. Am. Math. Soc., 20, 1969, 603.

[82] Saint Raymond J., Multivalued contractions, Set-Valued Anal., 2, 1994, 559-571.

[83] Schauder J., Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math.Z., 26, 1927, 63-98.

[84] Schauder J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math., 2, 1930, 171-180.

[85] Schauder J., Über lineare, vollstetige funktionaloperationen, Studia Mat., 2, 1930, 183-196.

[86] Stampacchia G., Formes bilinéaires coercitives sur les ensemble convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964, 4413-4416.

[87] Steinlein H., On two results of J. Dugundji about extensions of maps and retractions, Proc. Amer. Math. Soc., 77, 1979, 289-290.

[88] Stone A.H., Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 1948, 977-982.

[89] Tychonoff A.N., Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Anal., 102, 1930, 544-561.

[90] Tychonoff A. N., Über einen Funktionenräum, Math. Ann., 111, 1935, 767-776.

[91] Tychonoff A. N., Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111, 1935,

[92] Ursescu C., Multifunctions with closed convex graph, Czech. Math. J., 25, 1975, 438-441.

[93] Urysohn P., Über die Mächtigkeit der Zusammenhängenden Mengen, Math. Ann., 94, 1925, 262-295.

[94] Vrabie I. I., *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Second Edition, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **75**, Longman, 1995.

[95] Vrabie I. I., *Semigrupuri de Operatori Liniari şi Aplicaţii*, Editura Universităţii "Al.I.Cuza", Iaşi, 2001.

[96] Von Neumann J., Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Math. Ann., 100, 1928.

[97] Von Neumann J., Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Browerschen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, Vienna 8, 1937, 73-83.

[98] T. Ważewski, Sur une condition équivalent à l'équation au contingent, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. e Phys.*, **9** (1961), pp. 865-867.

[99] Zabreĭko P.P., A theorem for semiadditive functionals, Functional Anal. Appl., 3, 1969, 70-72.

[100] Zaremba S.K., Sur les equations au paratingent, Bull. Sci. Math., 60, 1936, 139-160.

[101] Zălinescu C., *Programare Matematică în Spaţii Infinit Dimensionale*, Editura Academiei, Bucureşti, 1999.

[102] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications; Part I: Fixed-Point Theorems, Part II: Monotone Operators, Part III: Variational Methods and Optimization, Parts IV/V: Applications to Mathematical Physics*, Springer, 1984.

Lectiile 3 si 4. Partiţia Unităţii

Partiţia unităţii reprezintă un instrument util în obţinerea unor rezultate globale pornind de la rezultate locale. In capitolele următoare vom utiliza această tehnică în cadrul spaţiilor metrice şi în cadrul spaţiilor compacte. Ambele tipuri de spaţii sunt paracompacte, cadru tipic în care se dezvoltă partiţia unităţii în mod uzual. Prezentarea teoriei partiţiei unităţii în cadrul spaţiilor paracompacte necesită un volum foarte mare de rezultate preliminare, unele cu demonstraţii complicate. Vom aborda în continuare teorema de existenţă a partiţiei unităţii separat pe cele două cazuri. În felul acesta se simplifică prezentarea deoarece în fiecare caz putem utiliza rezultate specifice cadrului topologic respectiv. In plus, în cazul spaţiilor metrice obţinem o proprietate suplimentară pentru funcţiile care formează partiţia unităţii şi anume aceea de a fi local lipschitziene.

1 Partiţia unităţii în spaţii metrice

Vom începe cu prezentarea teoriei partiţiei unităţii în spaţii metrice. In acest scop, vom expune câteva rezultate preliminare legate de topologia spaţiilor metrice. Peste tot în cele ce urmează, $S(x,r)$ notează sfera deschisă centrată în x şi de rază $r > 0$ într-un spaţiu metric iar $B(x,r)$ notează sfera închisă corespunzătoare.

Teorema 1 *Dacă X este spaţiu metric iar A şi B sunt submulţimi închise şi disjuncte ale lui X, atunci există o submulţime deschisă G cu proprietatea $A \subset G$ şi $B \cap \overline{G} = \emptyset$.*

Demonstraţie. Deoarece $A \cap B = \emptyset$ iar B este închisă, pentru fiecare $x \in A$ există $\delta_x > 0$ astfel încât $S(x,\delta_x) \cap B = \emptyset$. Mulţimea

$$G = \bigcup_{x \in A} S\left(x, \frac{\delta_x}{3}\right)$$

satisface condiţia din teoremă. Intr-adevăr, rezultă imediat că $A \subset G$ şi G este deschisă. Să arătăm că $B \cap \overline{G} = \emptyset$. Pentru aceasta, presupunem, prin reducere la absurd, că $y \in B \cap \overline{G}$. Obţinem $y \in B$ şi deci $y \notin A$. Deoarece A este închisă, există $\eta_y > 0$ astfel încât $S(y,\eta_y) \cap A = \emptyset$. In plus, $y \in \overline{G}$ implică

$$S(y, \frac{\eta_y}{3}) \cap G \neq \emptyset.$$

Există aşadar $z \in G$ cu proprietatea $\rho(z, y) < \eta_y/3$, unde ρ este metrica pe X. In plus, există $x \in A$ astfel încât $z \in S(x, \delta_x/3)$, deci $\rho(z, x) < \delta_x/3$. Obţinem

$$\rho(x, y) < \frac{\eta_y}{3} + \frac{\delta_x}{3} < \max\{\delta_x, \eta_y\},$$

ceea ce arată că, ori $y \in S(x, \delta_x) \cap B$, ori $x \in S(y, \eta_y) \cap A$. Acest fapt este imposibil. Să prezentăm o altă demonstraţie. Fie $f : X \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

unde $d(x, A) = \inf\{\rho(x, a); a \in A\}$. Funcţia f este continuă, $f(x) = 0$ pentru orice $x \in A$ şi $f(x) = 1$ pentru orice $x \in B$. Mulţimea $G = \{x \in X; f(x) < 1/2\}$ satisface condiţiile cerute. $\square$

Corolarul 1 *Dacă X este spaţiu metric, U este o submulţime deschisă a lui X şi $x \in U$, atunci există o vecinătate deschisă V a lui x cu proprietatea $\overline{V} \subset U$.*

Demonstraţie. Se aplică Teorema 1 cu $A = \{x\}$ şi $B = X \backslash U$. Altfel, există $r > 0$ astfel încât

$$S(x, r/2) \subset B(x, r/2 \subset B(x, r) \subset U.$$

$\square$

Un spaţiu topologic care are proprietatea cuprinsă în Teorema 1 se numeşte *normal* iar dacă are proprietatea cuprinsă în Corolarul 1 se numeşte *regulat.*

Observaţia 1 Se verifică uşor că un spaţiu topologic este normal dacă şi numai dacă pentru orice două submulţimi A şi B, nevide închise şi disjuncte, există două submulţimi deschise şi disjuncte G şi E astfel încât $A \subset G$ şi $B \subset E$. Un enunţ similar are loc şi pentru spaţii regulate.

Spaţiile normale au fost definite în 1923 de Heinrich Tietze, dar rolul lor a fost recunoscut ca urmare a lucrării [93] a lui Pavel Urysohn din 1925 asupra extensiilor funcţiilor continue.

O familie $\{A_i; i \in I\}$, de submulţimi ale unui spaţiu X care are proprietatea că $X = \cup_{i \in I} A_i$ se numeşte *acoperire* a lui X. O *subacoperire* a acoperirii $\mathcal{A}$ este o subfamilie $\mathcal{A}'$ a lui $\mathcal{A}$ care este de asemenea o acoperire a lui X. Dacă $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt acoperiri ale lui X, spunem că $\mathcal{A}$ *rafinează* $\mathcal{B}$ sau că $\mathcal{A}$ este o rafinare a lui

$\mathcal{B}$ dacă pentru fiecare $A \in \mathcal{A}$ există $B \in \mathcal{B}$ astfel încât $A \subset B$. O familie $\mathcal{A}$ de submulţimi ale unui spaţiu topologic X este *local finită* dacă pentru fiecare $x \in X$ există o vecinătate a lui x care are intersecţie nevidă cu cel mult un număr finit de mulţimi din $\mathcal{A}$. Un spaţiu topologic separat Hausdorff este *paracompact* dacă fiecare acoperire deschisă (acoperire formată din mulţimi deschise) a sa are o rafinare local finită. Atragem atenţia că atunci când vorbim de rafinare a unei acoperiri subînţelegem că acea rafinare este acoperire.

Vom demonstra în continuare că orice spaţiu metric este paracompact. Se va folosi Teorema lui Zermelo care afirmă că orice mulţime poate fi bine ordonată. Amintim că Teorema lui Zermelo este echivalentă cu Axioma alegerii şi cu Lema lui Zorn (vezi Capitolul 5). Pentru cititorul mai puţin familiarizat cu Teorema lui Zermelo, sau cu echivalentele sale (sau nu le acceptă), prezentăm o demonstraţie într-un caz particular (X este separabil), fără a utiliza Teorema lui Zermelo.

Teorema 2 *Orice spaţiu metric este paracompact, adică orice acoperire deschisă a sa are o rafinare deschisă local finită.*

Demonstraţie. Cazul când spaţiul X este separabil.

Etapa I. Arătăm că dacă spaţiul metric X este separabil atunci există o bază numărabilă pentru X. Fie $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ o mulţime numărabilă densă în X şi fie $S_{n,m} = S(x_n, 1/m)$ pentru $n, m = 1, 2, \cdots$. Familia de mulţimi $\{S_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ este o bază numărabilă pentru topologia lui X. Intr-adevăr, dacă V este deschisă şi $x \in V$ atunci există m astfel încât $S(x, 1/m) \subset V$ şi există $x_n \in S(x, 1/2m)$. Avem $S(x_n, 1/2m) \subset S(x, 1/m)$ şi deci $x \in S_{n,2m} \subset V$. Aşadar există o bază numărabilă pentru topologia lui X.

Etapa a II-a. Arătăm că orice acoperire deschisă a lui X are o subacoperire numărabilă (deci o rafinare deschisă numărabilă). Fie $\mathcal{A}$ o acoperire deschisă a lui X şi $\mathcal{B}$ o bază numărabilă (există conform etapei precedente). Pentru fiecare $A \in \mathcal{A}$ şi $x \in A$ există $B_{x,A} \in \mathcal{B}$ astfel încât $x \in B_{x,A} \subset A$. Familia

$$\mathcal{B}' = \{B_{x,A}; A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$

este numărabilă deoarece $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, deci se poate scrie în forma

$$\mathcal{B}' = \{B_{x_1,A_1}, B_{x_2,A_2}, \cdots\}.$$

Familia $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ astfel obţinută este o subacoperire numărabilă a lui $\mathcal{A}$. Am demonstrat deci că orice acoperire deschisă are o subacoperire numărabilă.

Etapa a III-a. Fie $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o acoperire deschisă a lui X. Pentru fiecare $x \in X$ selectăm $i(x) \in I$ astfel încât $x \in U_{i(x)}$. Aplicând Corolarul 1, există mulţimile deschise W_x şi V_x astfel încât

$$x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset W_x \subset \overline{W_x} \subset U_{i(x)}.$$

Familia $\mathcal{V} = \{V_x; x \in X\}$ este o acoperire deschisă a lui X, căreia îi aplicăm rezultatul demonstrat în Etapa a II-a. Există deci o subacoperire numărabilă $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots\}$ a lui $\mathcal{V}$. Fie $T_1 = W_{x_1}$ şi

$$T_n = W_{x_n} \cap (X \setminus \overline{V_{x_1}}) \cap \cdots \cap (X \setminus \overline{V_{x_{n-1}}})$$

pentru $n \geq 2$. Familia

$$\mathcal{T} = \{T_n; n \in \mathbf{N}\}$$

este o rafinare local finită a lui $\mathcal{U}$. Pentru a dovedi acest fapt, arătăm mai întâi că $\mathcal{T}$ este o acoperire a lui X. Fie $x \in X$. Dacă $x \notin T_1 = W_{x_1}$, fie n cel mai mic pentru care $x \in W_{x_n}$. Este clar că $\{W_{x_1}, W_{x_2}, \ldots\}$ este o acoperire a lui X şi deci existenţa lui n este asigurată. Este uşor de văzut că, din modul de alegere a lui n, rezultă $x \in T_n$. Am demonstrat deci că $\mathcal{T}$ este o acoperire a lui X. De asemenea $T_n \subset W_{x_n} \subset U_{i(x_n)}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ şi deci $\mathcal{T}$ rafinează $\mathcal{U}$.

In sfârşit să arătăm că $\mathcal{T}$ este local finită. Intr-adevăr, pentru orice $x \in X$, există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $x \in V_{x_n}$. Arătăm că numai un număr finit de mulţimi din $\mathcal{T}$ au intersecţie nevidă cu V_{x_n}. Aceasta rezultă din faptul că

$$T_{n+j} \cap V_{x_n} = \emptyset,$$

pentru orice $j \geq 1$. Demonstraţia este încheiată în cazul în care X este separabil.

Să demonstrăm acum Teorema 2 în cazul general, adică atunci când X nu este numaidecât separabil. Fie $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o acoperire deschisă a lui X. Din Teorema lui Zermelo, presupunem că $(I, \preceq)$ este bine ordonată. Definim inductiv, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, mulţimile $V_{n,i}$ cu $i \in I$ astfel: $V_{n,i}$ este reuniunea tuturor mulţimilor de forma $S(x, 2^{-n})$ cu proprietăţile

(a) i este primul element astfel încât $x \in U_i$;

(b) $x \notin V_{m,j}$ dacă $m < n$ şi $j \in I$;

(c) $S(x, 3/2^n) \subset U_i$.

Arătăm că $\mathcal{V} = \{V_{n,i}\ ; n \in \mathbf{N}, i \in I\}$ este o rafinare deschisă local finită a lui $\mathcal{U}$. Este clar că $V_{n,i}$ sunt deschise şi $V_{n,i} \subset U_i$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ şi $i \in I$, deci $\mathcal{V}$ este o rafinare deschisă a lui $\mathcal{U}$. De asemenea, $\mathcal{V}$ este o acoperire a lui X pentru că, dacă $x \in X$, există $n \in \mathbf{N}$, suficient de mare, astfel încât $S(x, 3/2^n) \subset U_i$. Dacă $x \notin V_{m,j}$ cu $m < n$ şi $j \in I$ atunci $x \in V_{n,i}$.

In sfârşit, arătăm că $\mathcal{V}$ este local finită. Pentru aceasta, fie $x \in X$, $n \in \mathbf{N}$ şi $i_0 \in I$ astfel încât $x \in V_{n,i_0}$ şi fie m suficient de mare astfel încât

$$S(x, 2^{-m}) \subset V_{n,i_0}.$$

Vom arăta următoarele:

(*d*) dacă $p \geq n + m$ atunci $S(x, 2^{-n-m}) \cap V_{p,i} = \emptyset$;

(*e*) dacă $p < n + m$ atunci $S(x, 2^{-n-m}) \cap V_{p,i} \neq \emptyset$ pentru cel mult un $i \in I$.

De aici rezultă că mulţimea $S(x, 2^{-n-m})$ intersectează un număr finit de elemente din $\mathcal{V}$ şi deci $\mathcal{V}$ este local finită.

Să demonstrăm (*d*). Fie $S(y, 2^{-p})$ o sferă ce apare în componenţa lui $V_{p,i}$. Vom demonstra că

$$S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap S(y, \frac{1}{2^p}) = \emptyset.$$

Deoarece $p > n$, din (b) rezultă $y \notin V_{n,i}$ pentru orice $i \in I$. Cum $S(x, 2^{-m}) \subset V_{n,i_0}$ rezultă $\rho(x, y) > 2^{-m}$, unde ρ este metrica pe X. In sfârşit,

$$S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap S(y, \frac{1}{2^p}) = \emptyset,$$

deoarece, dacă intersecţia de mai sus ar fi nevidă, ar rezulta

$$\rho(x, y) < \frac{1}{2^{n+m}} + \frac{1}{2^p} \leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{1}{2^m},$$

ceea ce este imposibil. Am demonstrat aşadar că, dacă $p \geq n + m$, $S(x, 2^{-n-m})$ are intersecţie vidă cu orice sferă ce apare în componenţa lui $V_{p,i}$ cu $i \in I$ şi deci (*d*).

Să demonstrăm acum punctul (*e*). Presupunem că există $i_1, i_2 \in I$ cu $i_1 < i_2$ astfel încât

$$S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap V_{p,i_1} \neq \emptyset, \qquad S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap V_{p,i_2} \neq \emptyset.$$

Există aşadar

$$u \in S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap V_{p,i_1} \qquad v \in S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap V_{p,i_2}.$$

Deoarece $u \in V_{p,i_1}$, există y astfel încât $u \in S(y, 2^{-p})$ şi (*a*), (*b*), (*c*) sunt verificate cu i_1 în loc de i şi cu p în loc de n. Din (*c*) rezultă

$$S(y, 3/2^p) \subset U_{i_1}. \tag{1}$$

Deoarece $v \in V_{p,i_2}$, există z astfel încât $v \in S(z, 2^{-p})$ şi $(a), (b), (c)$ sunt verificate cu i_2 în loc de i şi cu p în loc de n. Cum $i_1 < i_2$, din (a) rezultă că $z \notin U_{i_1}$. Combinând cu (1) deducem că $\rho(y, z) > 3/2^p$ şi deci $\rho(u, v) \geq 2^{-p}$. Pe de altă parte avem

$$\rho(u,v) < \frac{2}{2^{n+m}} = \frac{1}{2^{n+m-1}} \leq \frac{1}{2^p}.$$

Contradicţia la care am ajuns poate fi eliminată doar dacă (e) este adevărată. □

Noţiunea de spaţiu paracompact a fost definită în 1944 de Jean Dieudonné [32], unde s-a demonstrat că un spaţiu paracompact este normal. Faptul că un spaţiu metric este paracompact a fost demonstrat în 1948 de Arthur H. Stone [88]. Demonstraţia prezentată aici pentru cazul general este destul de simplă faţă de altele existente în literatură şi a fost publicată de Marry Ellen Rudin [81] în 1969.

Am demonstrat că într-un spaţiu metric orice acoperire deschisă $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ are o rafinare local finită $\mathcal{W} = \{W_j; j \in J\}$. Vom arăta în continuare că putem considera $J = I$.

Teorema 3 *Fie $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o acoperire deschisă a unui spaţiu topologic X cu proprietatea că există o rafinare deschisă local finită a sa. Atunci există o rafinare deschisă local finită a lui $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$, astfel încât $V_i \subset U_i$ pentru orice $i \in I$.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{W} = \{W_j; j \in J\}$ o rafinare deschisă local finită a lui $\mathcal{U}$. Pentru fiecare $j \in J$ fie $f(j) \in I$ astfel încât $W_j \subset U_{f(j)}$. Pentru fiecare $i \in I$ definim

$$V_i = \cup\{W_j; f(j) = i\}.$$

Mulţimea V_i poate fi vidă. Familia $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$ astfel construită satisface condiţiile cerute, fapt uşor de verificat. □

Următoarea teoremă arată că în spaţii metrice orice acoperire deschisă $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ se poate micşora ("shrink" în engleză) în sensul că există o acoperire deschisă $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$ astfel încât $\overline{V_i} \subset U_i$ pentru orice $i \in I$.

Dacă (X, ρ) este un spaţiu metric şi A este o submulţime nevidă a lui X, notăm

$$d(x, A) = \inf\{\rho(x, a); a \in A\}.$$

Teorema 4 *Fie X un spaţiu metric şi $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o acoperire deschisă a sa. Atunci există o acoperire deschisă $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$ a lui X astfel încât $\overline{V_i} \subset U_i$ pentru orice $\forall i \in I$.*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că spaţiul este mărginit. Dacă există $i_0 \in I$ astfel încât $U_{i_0} = X$, considerăm $V_{i_0} = X$ şi $V_i = \emptyset$ pentru $i \neq i_0$. Presupunem în continuare că $U_i \neq X$ pentru orice $i \in I$. Considerăm $E_i = X \setminus U_i$ şi definim pentru $x \in X$

$$p(x) = \sup\{d(x, E_i);\ i \in I\}.$$

Observăm că E_i sunt mulţimi nevide şi închise şi în plus există $i_0 \in I$ astfel încât $x \notin E_{i_0}$. Rezultă că $p(x) > 0$ pentru orice $x \in X$. Considerăm acum mulţimile

$$F_i = \{x \in X;\ d(x, E_i) \geq \frac{1}{2}\ p(x)\},\ \ i \in I.$$

Deoarece

$$F_i = \bigcap_{j \in I} \{x \in X;\ d(x, E_i) \geq \frac{1}{2}\ d(x, E_j)\},$$

şi ţinând cont că funcţia $x \mapsto d(x, A)$ este continuă, obţinem că mulţimile F_i sunt închise. Vom arăta că

$$\mathcal{F} = \{F_i;\ i \in I\}$$

este o acoperire a lui X şi că $F_i \subset U_i$ pentru orice $i \in I$. Pentru aceasta, fie $x \in X$. Din definiţia lui $p(x)$ deducem că există $i_0 \in I$ astfel încât

$$d(x, E_{i_0})\ \geq\ \frac{1}{2}\ p(x),$$

şi deci $x \in F_{i_0}$. In sfârşit, dacă $x \in F_i$ atunci $x \notin E_i$ (altfel, $d(x, E_i) = 0$ şi, din definiţia lui F_i, $p(x) \leq 0$), deci $x \in U_i$. Am obţinut o acoperire închisă $\mathcal{F} = \{F_i;\ i \in I\}$ a lui X cu $F_i \subset U_i$ pentru orice $\forall i \in I$. Pentru a încheia demonstraţia, folosim proprietatea de normalitate a spaţiilor metrice, Teorema 1, aplicată mulţimilor închise F_i şi E_i. Pentru fiecare $i \in I$ există V_i deschisă astfel încât $F_i \subset V_i$ şi

$$\overline{V_i} \cap E_i = \emptyset.$$

Este clar că $\mathcal{V} = \{V_i;\ i \in I\}$ este acoperire deschisă a lui X şi că $\overline{V_i} \subset U_i$ pentru orice $i \in I$. Demonstraţia este încheiată. □

Să observăm că dacă $\mathcal{U}$ este local finită atunci şi $\mathcal{V}$ dată de Teorema 4 este local finită.

Rezultatele de mai sus le rezumăm în

Teorema 5 *Fie X un spaţiu metric şi $\mathcal{U} = \{U_i;\ i \in I\}$ o acoperire deschisă a sa. Atunci există o rafinare deschisă local finită $\mathcal{V} = \{V_i;\ i \in I\}$ cu proprietatea $\overline{V_i} \subset U_i$ pentru orice $i \in I$.*

Demonstraţie. Se aplică Teorema 3 acoperirii $\mathcal{U}$, ţinând seama de Teorema 2. Se aplică apoi Teorema 4 rafinării obţinute în Teorema 3. $\square$

Suntem acum în măsură să prezentăm teorema de existenţă a partiţiei unităţii în spaţii metrice. Precizăm că pentru o funcţie $f : X \to \mathbf{R}$ notăm

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x; f(x) \neq 0\}}.$$

Teorema 6 *Fie X un spaţiu metric şi $\mathcal{A} = \{A_i;\ i \in I\}$ o acoperire local finită a sa. Atunci există o familie $\{p_i;\ i \in I\}$ de funcţii $p_i : X \to [0, 1]$ cu următoarele proprietăţi:*

(*a*) *p_i sunt local lipschitziene pentru orice $i \in I$;*

(*b*) *$\text{supp}(p_i) \subset A_i$ pentru orice $i \in I$;*

(*c*) *$\sum_{i\in I} p_i(x) = 1$ pentru orice $x \in X$.*

Suma din (c) are sens deoarece pentru fiecare x numai un număr finit de $p_i(x)$ sunt nenuli având în vedere (b) şi faptul că $\mathcal{A}$ este local finită.

Definiţia 1 Familia de funcţii $\{p_i;\ i \in I\}$ dată de Teorema 6 se numeşte *partiţie local lipschitziană a unităţii subordonată acoperirii $\mathcal{A}$.*

In situaţia în care avem nevoie ca p_i să fie doar continue, vom spune pe scurt *partiţie a unităţii* subordonată acoperirii $\mathcal{A}$. Teorema 6 afirmă deci că într-un spaţiu metric, pentru fiecare acoperire local finită, există o partiţie local lipschitziană a unităţii subordonată ei.

Demonstraţia Teoremei 6 Din Teorema 4 rezultă că există o acoperire deschisă local finită, $\mathcal{B} = \{B_i;\ i \in I\}$, astfel încât $\overline{B_i} \subset A_i$ pentru orice $i \in I$. Pentru fiecare $i \in I$ definim funcţia $f_i : X \to \mathbf{R}$ prin

$$f_i(x) = d(x, X \setminus B_i).$$

Aceste funcţii sunt lipschitziene cu constanta Lipschitz egală cu 1 şi în plus

$$\text{supp}(f_i) \subset \overline{B_i} \subset A_i.$$

Definim

$$p_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_{j\in I} f_j(x)}$$

pentru $x \in X$. După cum am mai precizat, suma de mai sus este finită. In plus, pentru fiecare $x \in X$ măcar un $f_i(x)$ este nenul deoarece $\mathcal{B}$ este acoperire iar dacă $x \in B_i, f_i(x) > 0$. Este clar că p_i sunt continue, $p_i(x) \in [0,1]$ pentru orice $x \in X$ şi $\sum_{i \in I} p_i(x) = 1$.

Să arătăm că p_i sunt local lipschitziene. Pentru aceasta, să fixăm $x_0 \in X$ şi să considerăm V o vecinătate a lui x_0 care intersectează un număr finit de elemente din $\mathcal{B}$, să zicem $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_n}\}$. Este clar că dacă $x \in V$ avem $p_i(x) = 0$ pentru $i \neq i_k,\ k = 1, \cdots, n$. Rămâne să ne ocupăm de p_{i_k} cu $k \in \{1, \cdots, n\}$. Deoarece

$$\sum_{j=1}^{n} f_{i_j}(x_0) = \sum_{i \in I} f_i(x_0) > 0,$$

există o vecinătate W a lui x_0, $W \subset V$, şi există $m > 0$, $M > 0$ astfel încât

$$m \leq \sum_{j=1}^{n} f_{i_j}(x) \leq M$$

pentru $x \in W$. Vom arăta că p_{i_k} este lipschitziană pe W. Pentru $x, y \in W$ avem

$$\begin{aligned} |p_{i_k}(x) - p_{i_k}(y)| &= \left| \frac{f_{i_k}(x)}{\sum_{j=1}^{n} f_{i_j}(x)} - \frac{f_{i_k}(y)}{\sum_{j=1}^{n} f_{i_j}(y)} \right| \leq \\ &\frac{1}{m^2} \mid f_{i_k}(x) \sum_{j=1}^{n} f_{i_j}(y) - f_{i_k}(y) \sum_{j=1}^{n} f_{i_j}(x) \mid \leq \\ &\frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^{n} \mid f_{i_k}(x) f_{i_j}(y) - f_{i_k}(y) f_{i_j}(x) \mid \leq \\ \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^{n} \mid f_{i_k}(y) f_{i_j}(y) - &f_{i_k}(y) f_{i_j}(x) \mid + \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^{n} \mid f_{i_k}(x) f_{i_j}(y) - f_{i_k}(y) f_{i_j}(y) \mid \leq \\ \frac{M}{m^2} \sum_{j=1}^{n} \mid f_{i_j}(y) - f_{i_j}(x) \mid &+ \frac{nM}{m^2} \mid f_{i_k}(x) - f_{i_k}(y) \mid \leq \frac{2nM}{m^2} \rho(x, y), \end{aligned}$$

unde ρ este metrica pe X. Demonstraţia este încheiată. □

2 Partiţia unităţii în spaţii compacte

Vom prezenta în continuare partiţia unităţii în spaţii compacte. Pentru aceasta avem nevoie de câteva rezultate preliminare. Incepem cu un rezultat stabilit de Pavel Uryson [93] în 1925, cunoscut în literatură sub numele de Lema lui Urysohn.

Teorema 7 *Dacă X este spaţiu normal iar A şi B sunt submulţimi închise şi disjuncte ale lui X, există o funcţie continuă $f : X \to [0,1]$ astfel încât $f(A) = \{0\}$ şi $f(B) = \{1\}$.*

Demonstraţie. Fie $U_1 = X \setminus B$. Deoarece X este normal, există $U_{1/2}$ deschisă astfel încât
$$A \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_1.$$
Determinăm apoi $U_{1/4}$ şi $U_{3/4}$ astfel încât
$$A = U_0 \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset U_1.$$

Continuăm procedeul inductiv şi pentru fiecare $k \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq 2^n$, determinăm $U_{k/2^n}$ astfel încât, dacă $i < j$, avem
$$U_i \subset \overline{U_i} \subset U_j.$$
Definim apoi funcţia f prin $f(x) = 1$ dacă $x \in B$ şi $f(x) = \inf\{i; x \in U_i\}$. Este clar că $f(x) = 0$ pentru $x \in A$. Pentru a arăta că f este continuă, observăm că, dacă $a \in (0,1]$ şi $b \in [0,1)$, avem
$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{i<a} U_i$$
şi
$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup_{i>b} (X \setminus \overline{U_i}),$$
deci mulţimile $f^{-1}([0,a))$ şi $f^{-1}((b,1])$ sunt deschise. □

Ipoteza că mulţimile A şi B sunt închise este esenţială. De exemplu, $A = (0,1)$ şi $B = (1,2)$ sunt disjuncte în spaţiul normal $\mathbf{R}$ dar nu există o funcţie continuă $f : \mathbf{R} \to [0,1]$ astfel încât $f(A) = \{0\}$ şi $f(B) = \{1\}$.

Dacă mulţimile A şi B au proprietatea cuprinsă în Teorema 7, spunem că ele pot fi separate printr-o funcţie continuă. Lema lui Uryson afirmă că dacă într-un spaţiu topologic normal orice pereche de mulţimi închise şi disjuncte pot fi separate prin mulţimi deschise atunci orice astfel de perechi pot fi separate prin funcţii continue. Reciproca este imediată pentru că, dacă $f : X \to [0,1]$ este funcţia dată, atunci mulţimile $f^{-1}([0,1/2))$ şi $f^{-1}((1/2,1])$ sunt deschise disjuncte şi conţin respectiv mulţimile A şi B.

Următorul corolar va fi utilizat în demonstraţia existenţei partiţiei unităţii.

Corolarul 2 *Fie A închisă şi V deschisă, submulţimi ale spaţiului normal X cu $A \subset V$. Atunci există o funcţie continuă $f : X \to [0,1]$ astfel încât $f(x) = 1$ pentru orice $x \in A$ şi* $\mathrm{supp}(f) \subset V$.

Demonstraţie. Considerăm $B = X \setminus V$ şi, din faptul că X este normal, determinăm D, deschisă, astfel încât

$$A \subset D \subset \overline{D} \subset V.$$

Aplicăm acum Teorema 7 pentru A şi $\mathrm{Fr}(\overline{D})$ în spaţiul $\overline{D}$ şi determinăm $g : \overline{D} \to [0,1]$ continuă astfel încât $g(x) = 1$ dacă $x \in A$ şi $g(x) = 0$ dacă $x \in \mathrm{Fr}(\overline{D})$. Extindem g punând $g(x) = 0$ pentru $x \in X \setminus \overline{D}$ şi astfel obţinem funcţia căutată. $\square$

Demonstrăm acum că un spaţiu compact este normal.

Teorema 8 *Dacă A şi B sunt mulţimi închise şi disjuncte ale unui spaţiu compact X, există o submulţime deschisă G cu proprietatea că $A \subset G$ şi $B \cap \overline{G} = \emptyset$.*

Demonstraţie. Folosind proprietatea de separaţie Hausdorff şi faptul că B este compactă, se deduce imediat că pentru fiecare $x \in A$ există o vecinătate deschisă a sa U_x, şi o mulţime deschisă W_x astfel încât $B \subset W_x$ şi $U_x \cap W_x = \emptyset$. Familia $\{U_x;\ x \in A\}$ este o acoperire deschisă pentru A şi deci există o subacoperire finită $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$. Evident mulţimea

$$G = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}$$

verifică proprietatea cerută.

$\square$

Suntem în măsură acum să demonstrăm teorema de existenţă a partiţiei unităţii în spaţii compacte.

Teorema 9 *Fie X un spaţiu compact şi fie $\mathcal{V} = \{V_i;\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ o acoperire deschisă a sa. Atunci există funcţiile continue $p_i : X \to [0,1]$ cu următoarele proprietăţi:*

(a) $\mathrm{supp}(f_i) \subset V_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n;$

(b) $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1, \quad x \in X.$

Demonstraţie. Pentru fiecare $x \in X$ există $V_{i(x)} \in \mathcal{V}$ astfel încât $x \in V_{i(x)}$ şi, conform Teoremei 8, există U_x vecinătate deschisă a lui x astfel încât $\overline{U_x} \subset V_{i(x)}$ (se ia $A = \{x\}$ şi $B = X \setminus V_{i(x)}$). Spaţiul compact X se poate acoperi cu

$$\mathcal{U} = \{U_{x_j};\ j = 1, \cdots, m\}.$$

Pentru fiecare $i \in \{1, \cdots, n\}$, considerăm W_i ca fiind reuniunea tuturor mulţimilor din $\mathcal{U}$ care au proprietatea $\overline{U_{x_j}} \subset V_i$. Este clar că $\{W_i; i = 1, 2, \cdots, n\}$ acoperă X şi $\overline{W_i} \subset V_i$. Aplicăm Corolarul 2 şi determinăm funcţiile continue $f_i : X \to [0, 1]$ cu proprietatea că $f_i(x) = 1$ dacă $x \in \overline{W_i}$ şi $\mathrm{supp}(f_i) \subset V_i$. Construim

$$p_1 = f_1,\ p_2 = f_2(1 - f_1), \cdots, p_n = f_n(1 - f_1)(1 - f_2) \cdots (1 - f_{n-1}).$$

Este clar că $\mathrm{supp}(p_i) \subset U_i$ şi

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 - (1 - f_1) \cdots (1 - f_n).$$

Deoarece familia $\{\overline{W_i};\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ este acoperire pentru X, deducem

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x) = 1$$

pentru orice $x \in X$. □

Definiţia 2 Dată acoperirea deschisă $\mathcal{V} = \{V_i;\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ a spaţiului compact X, familia de funcţii continue $\{p_i; i = 1, 2, \cdots, n\}$, $p_i : X \to [0, 1]$, care verifică (a) şi (b) din Teorema 9 se numeşte partiţie a unităţii subordonată acoperirii $\mathcal{V}$.

Teorema 9 afirmă că într-un spaţiu compact, pentru fiecare acoperire deschisă finită există o partiţie a unităţii subordonată ei.

Am prezentat în detaliu existenţa partiţiei unităţii în spaţii metrice şi în spaţii compacte. Se poate demonstra existenţa partiţiei unităţii în spaţii paracompacte. Pentru aceasta se arată mai întâi că un spaţiu paracompact este normal iar apoi se arată că într-un spaţiu normal fiecărei acoperiri local finite i se poate asocia o partiţie a unităţii subordonată ei. De altfel, existenţa partiţiei unităţii este echivalentă cu proprietatea spaţiului de a fi paracompact. Aceste rezultate sunt datorate lui Ernest Michael (1953). Cititorul interesat poate consulta [34] pentru detalii.

3 Aplicaţii

Să prezentăm câteva aplicaţii ale partiţiei unităţii; multe altele vor fi date în capitolele următoare.

Teorema 10 (Dugundji) *Fie X un spaţiu metric, Y un spaţiu normat, $A \subset X$ o mulţime închisă şi $f : A \to Y$ o funcţie continuă. Atunci f are o extensie continuă, $F : X \to Y$ astfel încât $F(x) \in \mathrm{conv}(f(A))$ pentru orice $x \in X$.*

Demonstraţie. Deoarece mulţimea A este închisă, pentru fiecare $x \in X \setminus A$ există $\varepsilon(x) > 0$ astfel încât $S(x, \varepsilon(x)) \cap A = \emptyset$. Familia

$$\{A_x = S(x, \frac{\varepsilon(x)}{4});\ x \in X \setminus A\}$$

este o acoperire deschisă a mulţimii $X \setminus A$. Fie $\{U_i;\ i \in I\}$ o rafinare local finită a sa şi $\{p_i;\ i \in I\}$ o partiţie local lipschitziană a unităţii subordonată ei. Pentru fiecare $i \in I$ există $x(i) \in X \setminus A$ astfel încât $U_i \subset A_{x(i)}$. Definim F prin

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in A \\ \sum_{i \in I} p_i(x) f(x_i) & \text{dacă } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

unde $x_i \in A$ este astfel încât

$$d(x_i, U_i) < 2\, d(A, U_i). \tag{2}$$

Precizăm că $d(A, B)$ notează $\inf\{\rho(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}$, unde ρ este metrica pe X. Existenţa lui x_i care satisface (2) este asigurată de faptul că $d(A, U_i) > 0$. Să arătăm că F este continuă pe X. Este clar că ea este continuă pe $\mathrm{int}A$ şi pe $X \setminus A$. Fie $x_0 \in \mathrm{Fr}(A)$. Dacă $x \in X \setminus A$ şi $p_i(x) > 0$ atunci avem $x \in U_i \subset A_{x(i)}$. Dar un calcul simplu arată că

$$\rho(x_i, x_0) \leq 4\rho(x_0, x).$$

Intradevăr, folosind (2), deducem că există $y \in U_i$ astfel încât

$$\rho(x_i, y) < 2\, d(A, U_i).$$

Este uşor de văzut că $\rho(x, y) < \rho(x, x_0)$. Obţinem astfel

$$\rho(x_i, x_0) \leq \rho(x_i, y) + \rho(y, x_0) \leq 2\rho(x_0, x) + \rho(x_0, y) \leq 4\rho(x_0, x).$$

Folosind continuitatea lui f în x_0 şi definiţia lui F rezultă imediat continuitatea lui F în x_0. Demonstraţia este încheiată. $\square$

Să observăm că rezultatul are loc, cu aceeaşi demonstraţie, şi în cazul când Y este spaţiu local convex. A fost obţinut de James Dugundji [33] în 1951, extinzându-se astfel rezultatul lui Heinrich Tietze din 1915 referitor la cazul $Y = \mathbf{R}$.

Problema extensiei la tot spaţiul a funcţiilor reale continue definite pe mulţimi închise a fost tratată pentru prima dată în spaţiul $\mathbf{R}^2$ de Henri Lebesgue (1907). A urmat Heinrich Tietze în 1915 pe spaţii metrice şi apoi Pavel Uryson pe spaţii normale în 1925. Să enunţăm acest rezultat şi să facem câteva comentarii asupra lui.

Teorema 11 *Fie X un spaţiu normal şi fie A o submulţime închisă a lui X.*

(a) *Orice funcţie continuă $f : A \to [a,b]$ poate fi extinsă la o funcţie continuă $F : X \to [a,b]$*

(b) *Orice funcţie continuă $f : A \to \mathbf{R}$ poate fi extinsă la o funcţie continuă $F : X \to \mathbf{R}$*

Ideea demonstraţiei punctului (a) este de a se construi un şir de funcţii continue (s_n) definite pe X, astfel încât (s_n) converge uniform şi astfel încât restricţia lui s_n la A aproximează f. Funcţia limită va fi funcţia căutată. Construcţia lui s_n se bazează pe Lema lui Uryson. Punctul (b) rezultă din (a). Intr-adevăr, observăm întâi că putem înlocui $\mathbf{R}$ cu $(-1,1)$ deoarece $(-1,1)$ este homeomorf cu $\mathbf{R}$. Aplicăm (a) şi extindem f la $g : X \to [-1,1]$. Considerăm apoi $D = g^{-1}(-1)) \cup g^{-1}(1)$, care este o mulţime închisă deoarece g este o funcţie continuă. Dar $g(A) = f(A) \subset (-1,1)$ şi deci $A \cap D = \emptyset$. Aplicăm acum Lema lui Uryson şi găsim o funcţie continuă $h : X \to [-1,1]$ astfel încât $h(D) = \{0\}$ şi $h(A) = \{1\}$. Extensia căutată este $F = h\, g$.

Ipoteza că A este închisă este esenţială în Teorema 11. De exemplu, $f : (0,1] \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = \sin 1/x$ nu are o extensie continuă la $[0,1]$.

Teorema 11 se poate generaliza uşor la funcţii cu valori în $\mathbf{R}^n$.

Este interesant de notat că în lucrarea lui Dugundji [33], ca o consecinţă a Teoremei 10, se arată pentru prima dată că, în spaţii normate infinit dimensionale, sfera unitate închisă nu are proprietatea de punct fix (vezi Capitolul 4). Mai precis, în spaţii normate infinit dimensionale există funcţii continue $f : B(0,1) \to B(0,1)$ fără puncte fixe. Vom prezenta în continuare demonstraţia dată de Heinrich Steinlein [87] în 1979 pentru această afirmaţie.

In primul rând să observăm că are loc o uşoară extindere a Teoremei 10 şi anume:

Propoziţia 1 *In condiţiile Teoremei 10, fie D o submulţime densă a lui A. Atunci f are o extensie continuă $F : X \to Y$ astfel încât $F(x) \in f(A) \cup \mathrm{conv}(f(D))$ pentru orice $x \in X$.*

Demonstraţia este aceeaşi cu cea a Teoremei 10 cu singura modificare că x_i în (2) este luat din D.

Teorema 12 *Fie Y un spaţiu normat de dimensiune algebrică infinită şi $U = \{x \in Y;\ \|x\| = 1\}$. Există o funcţie continuă $h : B(0,1) \to U$ cu proprietatea că $h(x) = x$ pentru orice $x \in U$.*

Demonstraţie. Fie L un subspaţiu propriu a lui Y care este dens. In spaţii infinit dimensionale astfel de subspaţii există, de exemplu, nuclee de funcţionale liniare necontinue. Să notăm $B = B(0,1)$. Se aplică Propoziţia 1 pentru

$$X = B, \quad A = U, \quad D = U \cap L$$

şi f aplicaţia identică pe U. Există deci $F : B \to Y$ astfel încât $F(x) = x$ pentru $x \in U$ şi

$$F(B) \subset U \cup \operatorname{conv}(U \cap L) = U \cup (B \cap L),$$

şi deci $F(B)$ este o submulţime proprie a lui B. Luăm $x_0 \in B(0,1/3) \setminus F(B)$ şi definim

$$G(x) = \frac{(1/2)(x - x_0) + \|x - x_0\| x_0}{\|(1/2)(x - x_0) + \|x - x_0\| x_0\|}$$

dacă $0 < \|x - x_0\| < 1/2$ şi

$$G(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

dacă $\|x - x_0\| \geq 1/2$. Funcţia căutată este $h = GF$. □

Observaţia 2 Iată un exemplu de funcţională liniară necontinuă pe spaţiul infinit dimensional Y. Se consideră $H = \{b_n; n \in \mathbf{N}\}$ o mulţime liniar independentă din $U = \{y; \|y\| = 1\}$ şi $\mathcal{B}$ o bază algebrică pentru Y ce include mulţimea H. Definim $f(b_n) = n$ şi $f(b) = 0$ pentru $b \in \mathcal{B} \setminus H$. Apoi extindem f prin liniaritate la tot spaţiul Y. Este clar că $f(U)$ nu este mărginită, deci f nu este continuă.

Corolarul 3 *In spaţii normate infinit dimensionale există funcţii continue* $f : B(0,1) \to B(0,1)$ *fără puncte fixe.*

Demonstraţie. Funcţia definită prin $f(x) = h(-x)$, unde h este funcţia din Teorema 11, satisface condiţia cerută. □

Incheiem acest paragraf cu un rezultat de aproximare a unei funcţii continue prin funcţii lipschitziene. Aparţine lui Andrzej Lasota şi James A. Yorke (1973).

Teorema 13 *Fie* D *o submulţime nevidă şi deschisă din spaţiul metric* X *şi* $f : D \to Y$ *o funcţie continuă, unde* Y *este un spaţiu normat. Atunci* f *se poate aproxima uniform prin funcţii local lipschitziene. Mai precis, pentru fiecare* $\varepsilon > 0$ *există o funcţie local lipschitziană* $f_\varepsilon : D \to Y$ *astfel încât*

$$\sup_{x \in D} \|f_\varepsilon(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Mai mult,

$$f_\varepsilon(D) \subset \operatorname{conv}(f(D)).$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Familia $\{f^{-1}(S(f(x), \varepsilon/2));\ x \in D\}$ este o acoperire deschisă pentru D. Fie $\{R_i;\ i \in I\}$ o rafinare deschisă local finită a sa şi $\{p_i; i \in I\}$ o partiţie local lipschitziană a unităţii subordonată ei. Pentru fiecare $i \in I$ luăm $x_i \in R_i$ şi definim

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I} p_i(x) f(x_i).$$

Este clar că f_ε este local lipschitziană şi

$$f_\varepsilon(D) \subset \mathrm{conv}(f(D)).$$

Să arătăm că

$$\|f_\varepsilon(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Pentru aceasta, să observăm că dacă $p_i(x) > 0$ atunci $x \in R_i$ şi există $x(i) \in D$ astfel încât $f(x) \in S(f(x(i)), \varepsilon/2)$ şi $f(x_i) \in S(f(x(i)), \varepsilon/2)$. $\square$

References

[1] Aubin J.-P., Cellina A., *Differential Inclusions,* Springer-Verlag, 1984.

[2] Aubin J.-P., Frankowska H., *Set-Valued Analysis,* Birkhäuser, 1990.

[3] Arzelà C., Funzioni di linee, Atti della R. Accad. dei Lincei Rendiconti della Cl.Si. Fis. mat. Nat., (4) 5, 1889, 342-348

[4] Ascoli G., Le curve limite di una varieta data di curve, Atti della R. Accad. dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 18, 1882-1883, 521-586.

[5] Baire L. R., Sur les functions de variable réelles, Ann. Mat. Pura Appl., (3) 3, 1899, 1-222.

[6] Banach S., Sur les opéerations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales, Fund. Math., 3, 1922, 133-181.

[7] Banach S., Sur les functionelles linéaires, Studia Math., 1, 1929, 211-216 şi 223-239.

[8] Banach S., Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Math., 3, 1931, 174-179.

[9] Banach S., *Théorie des Opérations linéaires*, Monografje matematyczne, Warsaw, 1932.

[10] Banach S, Steinhaus H., Sur le principe de la condensation de singularités, Fund. Math., 9, 1927, 50-61.

[11] Barbu V., *Semigrupuri de Contracţii Neliniare în Spaţii Banach*, Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[12] Barbu V., Metode Matematice în Optimizarea Sistemelor Diferenţiale, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[13] Bebernes J. W., Schuur J.D., The Ważewski topological method for contingent equations, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 87, 1970, 271-279.

[14] Begle E. G., A fixed point theorem, Ann. of Math., (2) 51, 1950, 544-550.

[15] Bielecki A., Une remarque sur la méthode de Banach- Caccioppoli-Tikhonov dans la théorie des équations differentielles ordinaires, Bull. Acad. Polon Sci. Cl. III, 4, 1956, 261-264.

[16] Birkhoff G. D., Proof of Poincaré's geometric theorem, Trans. Amer. Math. Soc., 14, 1913, 14-22.

[17] Birkhoff G. D., Kellogg O. D., Invariant points in functin space, Trans. Amer. Math. Soc., 23, 1922, 96-115.

[18] Blair C. E., The Baire category theorem implies the principle of dependent choices, Bull. Acad. Polon. Sci., 25, 1977, 933-934.

[19] Bohnenblust H., Karlin S., On a theorem of Ville, In: Contributions to the theory of games, Kuhn and Tucker Eds., 155-160, University Press, Princeton, 1950.

[20] Borsuk K., Sur les rétractes, Fund. Math., 17, 1931, 152-170.

[21] Brézis H., Browder F., A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis, Adv. in Mathematics, 21, 1976, 355-364.

[22] Brown R.F., Elementary cosequences of the noncontractibility of the circle, Amer. Math. Monthly, 81, 1974, 247-252.

[23] Browder F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177, 1968, 283-301.

[24] Brouwer L.E.J., Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 71, 1912, 97-115.

[25] Caccioppoli R., Una teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale, Ren. Accad. Naz Lincei, 11, 1930, 794-799.

[26] Cazenave T., Haraux A., *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[27] Cârjă O., Ursescu C., The characteristics method for a first order partial differential equation, An. Şti. Univ. "Al.I.Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat., 39, 1993, 367 - 396.

[28] Cârjă O., Vrabie I. I., Some new viability results for semilinear differential inclusions, NoDEA, 4, 1997, 401-424.

[29] Cellina A., Approximation of set-valued functions and fixed points theorems, Ann. Mat. Pura Appl., 82, 1969, 17-24.

[30] Costinescu O., *Elemente de topologie generală*, Editura tehnică, Bucureşti, 1969.

[31] Deimling K., *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, 1992.

[32] Dieudonné J.A., Une généralisation des espaces compactes, J. Math. Pures Appl., 23, 1944, 65-76.

[33] Dugundji J., An extension of Tietze's theorem, Pacific J. Math., 1, 1951, 353-367.

[34] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[35] Ekeland I., On the variational principle, J. Math. Anal. Appl., 74, 1974, 324-353.

[36] Feferman S., Independence of the axiom of choice from the axiom of independence choices, J. Sym. Logic, 29, 1967, 226.

[37] Gheorghiu N., *Introducere în Analiza Funcţională,* Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[38] Glicksberg I.L., A further generalization of the Kakutani fixed theorem, with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. Math. Soc., 3, 1952, 170-174.

[39] Goursat E., Sur la théorie des fonctions implicites, Bull. Soc. Math. France, 31, 1903, 184-192.

[40] Graves L.M., Some mapping theorems, Duke Math. J., 17, 1950, 111-114.

[41] Gröger K., A simple proof of the Brouwer fixed point theorem, Math. Nachr., 102, 1981, 293-295.

[42] Hahn H., Über Folgen linearen Operationen, Monatsh. math. Phys., 32, 1922, 3-88.

[43] Halmos P., Vaughan H., The marriage problem, 72, 1950, 214-215.

[44] Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Verlag von Veit, Leipzig, 1914.

[45] Hill L.S., Properties of certain aggregate functions, Amer. J. Math., 49, 1927, 419-432.

[46] Hildebrandt T. H., On uniform limitedness of sets of functional operators, Bull. Amer. Math. Soc., 29, 1923, 309-315.

[47] Holmes R., *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer, 1975.

[48] Kakutani S., A generalization of Brouwer's fixed-point theorem, Duke Math. J., 8, 1941, 457-459.

[49] Kantorovici L.V., Akilov G.P., *Analiză Funcţională,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[50] Karamardian S., Generalized complementarity problem, J. Optim. Theory Appl., 8, 1971, 161-168.

[51] Kelley J.L., The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, Fund. Math., 37, 1950, 75-76.

[52] Klein E., Thompson A.C., *Theory of Correspondences*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[53] Kuratowski K., Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés, Fund. Math., 18, 1932, 148-180.

[54] Kuratowski K., *Topology*, Academic Press, New York, 1966.

[55] Ky Fan, Fixed-point and minimax theorems in locally convex linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., 38, 1952, 121-126.

[56] Ky Fan, A minimax inequality and applications, in: Inequalities III, 103-113, Academic Press, New York, 1972.

[57] Ky Fan, Glicksberg I., Some geometric properties of the spheres in a normed linear space, Duke Math. J., 25, 1958, 553-568.

[58] Leray J, Schauder J., Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 51, 1934, 45-78.

[59] Lichtenstein L., Über einige Existenzprobleme der Variationsrehnung. Methode der unendlichvielen Variabeln, J. Reine Angew. Math., 145, 1915, 24-85.

[60] Lifshits E.A., Ideally convex sets, Funct. Anal. Appl., 4, 1970, 330-331, tradus din Funkts. Anal. Prilozh., 4, 1970, 76-77

[61] Lindenstrauss J, Tzafriri L, On the complemented subspaces problem, Israel J. Math., 9, 1971, 263-269.

[62] Lyusternik L.A., Conditional extrema of functionals, Mat. Sb., 41, 1934, 390-401.

[63] Marchaud A., Sur les champs continus de demi-cones convex et leur integrales, Comp. math., 3, 1936, 89-127.

[64] Megginson R. E., *An Introduction to Banach Spaces Theory*, Springer, 1998.

[65] Michael E., Continuous selections I, Ann. Math., 63, 1956, 361-382.

[66] Michael E., Continuous selections II, Ann. Math., 64, 1956, 562-580.

[67] Miranda C., Un'osservazione su un teorema di Brouwer, Boll. Un. Mat. Ital., (2) 3, 1940, 527.

[68] Moore R. L., Concerning upper semicontinuous collections of continua, Trans. Amer. Math. Soc., 27, 1925, 416-428.

[69] Moore E. H., Smith H. L., A general theory of limits, Amer. J.Math., 44, 1922, 102-121.

[70] Nadler S. B. Jr., Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math., 30, 1969, 475-488.

[71] Nagumo M., Über die Lage der Integralkurven gewönlicher Differentialgleichungen, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 24, 1942, 551-559.

[72] Ostrowski A.M., The round-off stability of iterations, Z. Angew. Math. Mech., 47, 1967, 77-81.

[73] Phillips R. S., On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 48, 1940, 516-541.

[74] Picard E., Mémoire sur la théorie des équations aux dérivés partielles et la méthode des approximations successives, J. Math. Pures Appl. 6, 1890, 145-210.

[75] Picone M., *Lezioni di analizi infinitesimale*, vol. 1, Circolo Matematico di Catania, Catania, Italy, 1923.

[76] Popa E., *Culegere de Probleme de Analiză Funcţională,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[77] Precupanu A., *Analiză Matematică. Funcţii Reale,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

[78] Precupanu A., *Bazele Analizei Matematice,* Editura Universităţii "Al.I.Cuza" Iaşi, Iaşi, 1993.

[79] Precupanu T., *Spaţii Liniare Topologice şi Elemente de Analiză Convexă,* Editura Academiei, Bucureşti, 1992.

[80] Robinson S., Regularity and stability for convex multivalued functions, Math. Oper. Res., 1, 1976, 130-143.

[81] Rudin M.E., A new proof that metric spaces are paracompact, Proc. Am. Math. Soc., 20, 1969, 603.

[82] Saint Raymond J., Multivalued contractions, Set-Valued Anal., 2, 1994, 559-571.

[83] Schauder J., Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math.Z., 26, 1927, 63-98.

[84] Schauder J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math., 2, 1930, 171-180.

[85] Schauder J., Über lineare, vollstetige funktionaloperationen, Studia Mat., 2, 1930, 183-196.

[86] Stampacchia G., Formes bilinéaires coercitives sur les ensemble convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964, 4413-4416.

[87] Steinlein H., On two results of J. Dugundji about extensions of maps and retractions, Proc. Amer. Math. Soc., 77, 1979, 289-290.

[88] Stone A.H., Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 1948, 977-982.

[89] Tychonoff A.N., Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Anal., 102, 1930, 544-561.

[90] Tychonoff A. N., Über einen Funktionenräum, Math. Ann., 111, 1935, 767-776.

[91] Tychonoff A. N., Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111, 1935,

[92] Ursescu C., Multifunctions with closed convex graph, Czech. Math. J., 25, 1975, 438-441.

[93] Urysohn P., Über die Mächtigkeit der Zusammenhängenden Mengen, Math. Ann., 94, 1925, 262-295.

[94] Vrabie I. I., *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Second Edition, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **75**, Longman, 1995.

[95] Vrabie I. I., *Semigrupuri de Operatori Liniari şi Aplicaţii*, Editura Universităţii "Al.I.Cuza", Iaşi, 2001.

[96] Von Neumann J., Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Math. Ann., 100, 1928.

[97] Von Neumann J., Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Browerschen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, Vienna 8, 1937, 73-83.

[98] T. Ważewski, Sur une condition équivalent à l'équation au contingent, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. e Phys.*, **9** (1961), pp. 865-867.

[99] Zabreĭko P.P., A theorem for semiadditive functionals, Functional Anal. Appl., 3, 1969, 70-72.

[100] Zaremba S.K., Sur les equations au paratingent, Bull. Sci. Math., 60, 1936, 139-160.

[101] Zălinescu C., *Programare Matematică în Spaţii Infinit Dimensionale*, Editura Academiei, Bucureşti, 1999.

[102] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications; Part I: Fixed-Point Theorems, Part II: Monotone Operators, Part III: Variational Methods and Optimization, Parts IV/V: Applications to Mathematical Physics*, Springer, 1984.

Lectiile 5-8

1 Multifunctii

In acest capitol prezentăm câteva elemente din teoria aplicaţiilor multivoce, adică a aplicaţiilor $F : X \to 2^Y$, X şi Y fiind două mulţimi. Prin urmare, fiecărui element $x \in X$ i se asociază o submulţime a lui Y (care poate fi şi $\emptyset$), notată $F(x)$. După cum se va vedea mai jos, mai potrivită este definirea multifuncţiei ca o *relaţie*, adică o submulţime a produsului cartezian $X \times Y$ deoarece în multe cazuri structura lui 2^Y este mai săracă decât cea a lui Y. Acest punct de vedere este îmbrăţişat în special de economişti, noţiunea utilizată fiind cea de *corespondenţă.* Noi vom folosi termenul de *multifuncţie* şi notaţia $F : X \rightsquigarrow Y$.

Submulţimea $F(x)$ a lui Y se numeşte *valoarea* lui F în x. Submulţimea

$$\mathrm{Dom}(F) = \{x \in X;\ F(x) \neq \emptyset\}$$

se numeşte *domeniul* lui F. O multifuncţie se numeşte *proprie* dacă are domeniul nevid şi *strictă* dacă domeniul este întreg spaţiul. Mulţimea

$$\mathrm{Im}(F) = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

o numim *imaginea* lui F. Dacă $D \subset X$, definim

$$F(D) = \bigcup_{x \in D} F(x).$$

Deci, $\mathrm{Im}(F) = F(X)$. De fapt, o multifuncţie F este caracterizată prin *graficul* său, submulţimea lui $X \times Y$ definită prin

$$\mathrm{Graf}(F) = \{(x, y);\ y \in F(x)\}.$$

Intr-adevăr, dacă $\mathcal{F}$ este o submulţime nevidă a spaţiului $X \times Y$, ea este graficul multifuncţiei $F : X \rightsquigarrow Y$ definită prin

$$F(x) = \{y \in Y;\ (x, y) \in \mathcal{F}\}.$$

Să observăm că în definiţia graficului am considerat multifuncţia ca fiind o relaţie şi nu o funcţie de la X la 2^Y pentru că am definit $\mathrm{Graf}(F)$ ca fiind o submulţime a lui $X \times Y$ şi nu a lui $X \times 2^Y$. *Inversa* F^{-1} a lui F este multifuncţia $F^{-1} : Y \rightsquigarrow X$ definită prin

$$F^{-1}(y) = \{x \in X;\ y \in F(x)\}$$

sau, echivalent,

$$\mathrm{Graf}(F^{-1}) = \{(y,x);\ (x,y) \in \mathrm{Graf}(F)\}.$$

Notăm că mulţimea $\mathrm{Dom}(F)$ este proiecţia mulţimii $\mathrm{Graf}(F)$ pe X iar $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Dom}(F^{-1})$ este proiecţia mulţimii $\mathrm{Graf}(F)$ pe Y. Vom spune că o multifuncţie este *închisă (convexă)* dacă $\mathrm{Graf}(F)$ este mulţime închisă (convexă) în spaţiul $X \times Y$. O multifuncţie al cărei grafic este con (convex) (închis) se numeşte proces (*convex*) (*închis*). Dacă $M \subset Y$ notăm

$$F^{-1}(M) = \{x;\ F(x) \cap M \neq \emptyset\},$$

$$F^{+1}(M) = \{x;\ F(x) \subset M\}.$$

Este uşor de verificat că

$$F^{-1}(Y \setminus M) = X \setminus F^{+1}(M),$$

$$F^{+1}(Y \setminus M) = X \setminus F^{-1}(M).$$

Să observăm că atunci când F este funcţie, adică $F(x) = \{f(x)\}$ unde $f : X \to Y$ este o funcţie, ambele mulţimi $F^{-1}(M)$ şi $F^{+1}(M)$ definite mai sus se reduc la

$$f^{-1}(M) = \{x \in X;\ f(x) \in M\}.$$

Anticipând puţin, cele două moduri de a defini contraimaginea unei mulţimi conduc la două concepte de continuitate globală pentru multifuncţii care extind conceptul de continuitate de la funcţii. Astfel, dacă $F^{-1}(M)$ este deschisă în $\mathrm{Dom}(F)$ pentru orice M deschisă în Y, spunem că F este semicontinuă inferior, iar dacă $F^{+1}(M)$ este deschisă în $\mathrm{Dom}(F)$ pentru orice mulţime M deschisă în Y, spunem că F este semicontinuă superior. Ambele noţiuni se reduc la continuitate când F este funcţie.

Să prezentăm în continuare câteva exemple semnificative de multifuncţii.

Exemplul 1 Considerăm $f : X \to Y$ o funcţie şi definim multifuncţia $F : Y \rightsquigarrow X$ prin

$$F(y) = f^{-1}(y) = \{x;\ f(x) = y\}.$$

Dacă f nu este surjectivă atunci $\mathrm{Dom}(F)$ nu este tot spaţiul Y. Dacă f nu este injectivă atunci F nu este o funcţie. Studiul acestei multifuncţii este legat de rezolvarea ecuaţiei $f(x) = y$. De exemplu, studiul stabilităţii în raport cu y a soluţiilor ecuaţiei conduce la studiul continutăţii multifuncţiei F.

Exemplul 2 (multifuncţii parametrizate) Considerăm funcţia $f : X \times Z \to Y$ şi definim multifuncţia $F : X \rightsquigarrow Y$ prin

$$F(x) = \{f(x,u);\ u \in Z\}. \tag{1}$$

Astfel de multifuncţii apar în teoria controlului. Mai general, considerând multifuncţia $U : X \rightsquigarrow Z$, funcţiei f şi multifuncţiei U li se asociază multifuncţia $G : X \rightsquigarrow Y$

$$G(x) = \{f(x,u);\ u \in U(x)\}. \tag{2}$$

Legate de aceste multifuncţii sunt incluziunile diferenţiale. Astfel, considerându-se un sistem dinamic

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{3}$$

controlat prin parametrul u (numit *control*), soluţiile ecuaţiilor diferenţiale (3) sunt soluţiile incluziunii diferenţiale

$$x'(t) \in F(x(t)) \quad x(0) = x_0,$$

unde F este dată de (1) şi în care controalele nu apar în mod explicit.

Incluziunea diferenţială asociată multifuncţiei G dată de (2), adică

$$x'(t) \in G(x(t)) \quad x(0) = x_0,$$

descrie un sistem dinamic în care apare o lege de feed–back a controalelor admisibile, $u(t) \in U(x(t))$.

Exemplul 3 Fie $f : X \times Y \to \mathbf{R}$, $G : X \rightsquigarrow Y$ şi pentru fiecare $x \in X$ fie problemele de maximizare

$$\sup_{y \in G(x)} f(x,y). \tag{4}$$

Funcţia $h : X \to \overline{\mathbf{R}}$ definită prin

$$h(x) = \sup_{y \in G(x)} f(x,y)$$

se numeşte *funcţia valoare* asociată problemelor (4). In teoria optimizării, o problemă de mare interes este studiul multifuncţiei $F : X \rightsquigarrow Y$ ale cărei valori sunt soluţiile problemelor (4), adică

$$F(x) = \{y \in G(x);\ h(x) = f(x,y)\}.$$

Exemplul 4 Considerăm funcţia $f : X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ şi definim $F : X \rightsquigarrow \mathbf{R}$ prin

$$F(x) = \begin{cases} f(x) + \mathbf{R}_+ & \text{dacă } f(x) < +\infty \\ \emptyset & \text{dacă } f(x) = +\infty. \end{cases}$$

Este clar că

$$\mathrm{Dom}(F) = \{x;\ f(x) < +\infty\} = \mathrm{dom}\,(f)$$

iar

$$\mathrm{Graf}(F) = \{(x, y) \in X \times \mathbf{R};\ f(x) \leq y\}.$$

Mulţimea din membrul drept al egalităţii de mai sus se numeşte *epigraful* funcţiei f) şi se notează epi(f).

Se vede că fiecărei funcţii care ia valori în $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ i se asociază o multifuncţie ca mai sus şi reciproc, fiecărei multifuncţii cu valori în $\mathbf{R}$ i se poate asocia o funcţie a cărui epigraf să fie graficul multifuncţiei date. Pentru aceasta se defineşte

$$f(x) = \inf F(x),\ x \in X.$$

In mod similar, funcţiei $g : X \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ i se poate asocia multifuncţia $G : X \rightsquigarrow \mathbf{R}$ prin

$$G(x) = \begin{cases} g(x) - \mathbf{R}_+ & \text{dacă } g(x) > -\infty \\ \emptyset & \text{dacă } g(x) = -\infty, \end{cases}$$

Avem

$$\mathrm{Graf}(G) = \{(x, y) \in X \times \mathbf{R};\ g(x) \geq y\}.$$

Mulţimea din membrul drept al egalităţii de mai sus se numeşte *hipograful* funcţiei g) şi se notează hipo(g).

Exemplul 5 Fie $f : X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ o funcţie convexă şi proprie. Multifuncţia $F : X \rightsquigarrow X^*$ definită prin

$$F(x) = \{x^* \in X^*;\ f(x) - f(y) \leq \langle x - y, x^* \rangle,\ \forall y \in X\}$$

se numeşte *subdiferenţiala* funcţiei f şi se notează (de obicei) cu ∂f. Precizăm că $\langle \cdot, \cdot \rangle$ notează dualitatea naturală între X şi X^*, adică $\langle x, x^* \rangle = x^*(x)$.

Exemplul 6 Fie X spaţiu Banach şi $F : X \rightsquigarrow X^*$ definită prin

$$F(x) = \{x^* \in X^*;\ \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Această multifuncţie se numeşte *aplicaţia de dualitate* a spaţiului X. Dacă X este spaţiu Hilbert atunci F devine izomorfismul canonic dat de Teorema lui Riesz. Deoarece într-un spaţiu normat X, pentru fiecare $x \in X$ există $x^* \in X^*$ cu $\langle x, x^* \rangle = \|x\|^2$ şi $\|x^*\| = \|x\|$ (vezi [37, p.111]), rezultă că $\mathrm{Dom}(F) = X$.

2 Multifuncţii superior semicontinue şi multifuncţii inferior semicontinue

Toate spaţiile topologice considerate în continuare sunt presupuse a fi separate Hausdorff.

Definiţia 1 Fie X şi Y spaţii topologice şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie. Spunem că F este *superior semicontinuă* în $x_0 \in \mathrm{Dom}(F)$ dacă, pentru orice mulţime deschisă V cu proprietatea $F(x_0) \subset V$, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $F(U) \subset V$. Multifuncţia F este superior semicontinuă (global) dacă ea este superior semicontinuă în orice punct din $\mathrm{Dom}(F)$.

Definiţia 2 Fie X şi Y spaţii toplogice şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie. Spunem că F este *inferior semicontinuă* în $x_0 \in \mathrm{Dom}(F)$ dacă, pentru orice mulţime deschisă V cu proprietatea că $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru orice $x \in U \cap \mathrm{Dom}(F)$ avem $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Multifuncţia F este inferior semicontinuă (global) dacă ea este inferior semicontinuă în orice punct din $\mathrm{Dom}(F)$.

Să considerăm multifuncţiile $F_1 : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$ şi $F_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin

$$F_1(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{dacă } x = 0 \\ [-1, 1] & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{dacă } x = 0 \\ \{0\} & \text{dacă } x \neq 0. \end{cases}$$

Multifuncţia F_1 este inferior semicontinuă în orice punct din $\mathbf{R}$ dar nu este superior semicontinuă în $x = 0$. Să justificăm partea finală a afirmaţiei de mai sus. Considerăm $V = (-1/2, 1/2)$, observăm că $F_1(0) \subset V$ dar pentru orice U vecinătate a lui 0 şi $x \in U$, $x \neq 0$, avem $F_1(x) = [-1, 1] \not\subset V$. Multifuncţia F_2 este superior semicontinuă în orice punct din $\mathbf{R}$ dar nu este inferior semicontinuă în $x = 0$. Pentru a demonstra partea finală a acestei afirmaţii, considerăm $V = (0, 1/2)$ şi observăm că $F_2(0) \cap V \neq \emptyset$, dar pentru orice U vecinătate a lui 0 şi $x \in U$, $x \neq 0$, avem $F_2(x) = \{0\}$ şi deci $F_2(x) \cap V = \emptyset$.

Să facem câteva comentarii asupra terminologiei. Deşi ambele concepte introduse în Definiţiile 1 şi 2 se reduc la continuitate în cazul funcţiilor, unele legături cu semicontinuitatea inferioară şi superioară de la funcţii se pot face. In primul rând, dacă privim multifuncţia F ca o funcţie de la X la 2^Y, întrebarea firească este dacă noţiunile de continuitate introduse mai sus corespund continuităţii clasice pentru anumite topologii pe spaţiul 2^Y. Răspunsul este afirmativ. Semicontinuitatea superioară corespunde continuităţii clasice când pe 2^Y se consideră *topologia superioară* adică topologia generată de baza

$$\mathcal{U} = \{[\cdot, G];\ G \in \tau\} \cup \{\emptyset\},$$

unde $[\cdot, G]$ notează $\{U \in 2^Y;\ U \subset G\}$, iar τ este topologia pe Y. Această topologie este similară cu topologia inferioară pe $\overline{\mathbf{R}}$ dacă se înlocuieşte $\subset$ cu $>$. Dar topologia inferioară pe $\overline{\mathbf{R}}$ conduce la noţiunea de funcţie inferior semicontinuă pentru $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$. Consideraţii similare se pot face şi pentru semicontinuitatea inferioară a multifuncţiilor.

Noţiunile de semicontinuitate inferioară şi superioară pentru multifuncţii au fost introduse şi studiate, în maniera prezentată aici, de Kazimierz Kuratowski [53] în 1932. Menţionăm însă că originea lor este ceva mai veche. In acest context amintim teza de doctorat a lui Florin Vasilescu publicată la *Gauthier-Villars* în 1925 (pentru multifuncţii din plan) şi o lucrare tot din 1925 a lui Robert Lee Moore [68] (aici se folosesc noţiunile de limită inferioară şi superioară pentru şiruri de mulţimi).

Propoziţia următoare pune în evidenţă un alt element de legătură între semicontinuitatea multifuncţiilor şi semicontinuitatea funcţiilor.

Propoziţia 1 *Fie X spaţiu topologic, funcţia $f : X \to \mathbf{R}$ şi multifuncţia $F : X \rightsquigarrow \mathbf{R}$,*

$$F(x) = f(x) + \mathbf{R}_+.$$

(i) Funcţia f este inferior semicontinuă dacă şi numai dacă multifuncţia F este superior semicontinuă;

(ii) Funcţia f este superior semicontinuă dacă şi numai dacă multifuncţia F este inferior semicontinuă.

Demonstraţie. (i) Presupunem că f este inferior semicontinuă. Fie $x_0 \in X$ şi V o mulţime deschisă în $\mathbf{R}$ astfel încât $F(x_0) \subset V$. Există deci $\alpha < f(x_0)$ cu $(\alpha, \infty) \subset V$. Deoarece f este inferior semicontinuă, există U, vecinătate a lui x_0, astfel încât $f(x) > \alpha$ pentru orice $x \in U$ şi deci $F(x) \subset V$ pentru orice $x \in U$. Reciproc, presupunem că F este superior semicontinuă şi arătăm că f este inferior semicontinuă. Pentru aceasta, fie $\alpha < f(x_0)$. Avem $F(x_0) \subset (\alpha, \infty)$ şi deci există U, vecinătate a lui x_0, astfel încât $F(x) \subset (\alpha, \infty)$ pentru $x \in U$. Aceasta arată că $f(x) > \alpha$ pentru $x \in U$ şi deci f este inferior semicontinuă în x_0.

(ii) Presupunem că f este superior semicontinuă. Fie $x_0 \in X$ şi V, deschisă în $\mathbf{R}$, astfel încât $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$. Există deci $\alpha \in F(x_0) \cap V$ prin urmare $\alpha \in V$ şi $\alpha \geq f(x_0)$. Deoarece V este deschisă, putem presupune că $\alpha > f(x_0)$. Cum f

este superior semicontinuă, există U, vecinătate a lui x_0, astfel încât pentru $x \in U$ avem $f(x) < \alpha$. Prin urmare $\alpha \in F(x) \cap V$ pentru $x \in U$, ceea ce arată că F este inferior semicontinuă în x_0. Lăsăm pe seama cititorului încheierea demonstraţiei. De asemenea trimitem la Problemele **??** şi **??**. $\square$

Să prezentăm acum un rezultat de caracterizare a semicontinuităţilor globale.

Teorema 1 *Fie X şi Y spaţii topologice. Multifuncţia $F : X \rightsquigarrow Y$ este superior semicontinuă dacă şi numai dacă pentru orice mulţime D, deschisă în Y, mulţimea*

$$F^{+1}(D) = \{x \in \mathrm{Dom}(F);\ F(x) \subset D\}$$

este deschisă în $\mathrm{Dom}(F)$.

Demonstraţie. Presupunem că F este superior semicontinuă în orice punct din $\mathrm{Dom}(F)$. Fie D deschisă în Y. Pentru fiecare $x \in \mathrm{Dom}(F)$ cu $F(x) \subset D$, există o mulţime deschisă U_x astfel încât $x \in U_x$ şi $F(U_x) \subset D$. Este clar că $U_x \cap \mathrm{Dom}(F)$ este deschisă în $\mathrm{Dom}(F)$ şi

$$\bigcup (U_x \cap \mathrm{Dom}(F)) = \{x \in \mathrm{Dom}(F);\ F(x) \subset D\},$$

reuniunea din membrul stâng fiind luată după acei x din mulţimea scrisă în membrul drept. Deoarece mulţimea din membrul stâng este deschisă rezultă că mulţimea din membrul drept este deschisă. Reciproc, fie $x_0 \in \mathrm{Dom}(F)$ şi fie V deschisă astfel încât $F(x_0) \subset V$. Atunci mulţimea

$$U = \{x \in \mathrm{Dom}(F);\ F(x) \subset V\}$$

este deschisă, conţine x_0 şi $F(U) \subset V$. Demonstraţia este încheiată. $\square$

Teorema 2 *Fie X şi Y spaţii topologice. Multifuncţia $F : X \rightsquigarrow Y$ este inferior semicontinuă dacă şi numai dacă pentru orice mulţime D, deschisă în Y, mulţimea*

$$F^{-1}(D) = \{x;\ F(x) \cap D \neq \emptyset\}$$

este deschisă în $\mathrm{Dom}(F)$.

Demonstraţie. Presupunem că F este inferior semicontinuă în orice punct din $\mathrm{Dom}(F)$. Fie D o mulţime deschisă şi fie $x_0 \in \{x;\ F(x) \cap D \neq \emptyset\}$. Este clar că

$x_0 \in \mathrm{Dom}(F)$ şi deci există U, vecinătate a lui x_0, astfel încât $F(x) \cap D \neq \emptyset$ pentru $x \in U \cap \mathrm{Dom}(F)$. Aceasta arată că

$$U \cap \mathrm{Dom}(F) \subset \{x;\ F(x) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Reciproca se demonstrează analog şi o lăsăm ca exerciţiu. $\square$

Să mai observăm că F este superior semicontinuă dacă şi numai dacă $F^{-1}(\Omega)$ este închisă în $\mathrm{Dom}(F)$ pentru orice mulţime Ω închisă în Y şi că este inferior semicontinuă dacă şi numai dacă $F^{+1}(\Omega)$ este închisă în $\mathrm{Dom}(F)$ pentru orice mulţime Ω închisă în Y.

Să prezentăm acum şi câteva caracterizări ale semicontinuităţilor în punct.

Teorema 3 *Fie X şi Y spaţii metrice, $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie şi $x_0 \in \mathrm{Dom}(F)$. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) Multifuncţia F este superior semicontinuă în x_0;

(ii) Pentru orice mulţime închisă Ω verificând $F(x_0) \cap \Omega = \emptyset$ există U, vecinătate a lui x_0, astfel încât $F(U) \cap \Omega = \emptyset$;

(iii) Pentru orice mulţime închisă Ω şi pentru orice şir (x_n) cu $x_n \to x_0$ şi $F(x_n) \cap \Omega \neq \emptyset$ avem $F(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset$;

(iv) Pentru orice mulţime deschisă V astfel încât $F(x_0) \subset V$ şi orice şir (x_n), $x_n \to x_0$, există n_V astfel încât, dacă $n \geq n_V$, avem $F(x_n) \subset V$.

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$ Fie Ω o mulţime închisă astfel încât $F(x_0) \cap \Omega = \emptyset$. Mulţimea $V = Y \setminus \Omega$ este deschisă şi $F(x_0) \subset V$. Din (i), există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $F(U) \subset V$, ceea ce implică $F(U) \cap \Omega = \emptyset$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Fie Ω o mulţime închisă în Y şi fie (x_n) un şir cu $x_n \to x_0$ şi $F(x_n) \cap \Omega \neq \emptyset$. Presupunem că $F(x_0) \cap \Omega = \emptyset$. Conform (ii) există U, vecinătate a lui x_0, astfel încât $F(U) \cap \Omega = \emptyset$. Pentru n suficient de mare avem $x_n \in U$, ceea ce conduce la o contradicţie.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Fie V deschisă astfel încât $F(x_0) \subset V$ şi fie (x_n) un şir convergent la x_0. Mulţimea $\Omega = Y \setminus V$ este închisă şi $F(x_0) \cap \Omega = \emptyset$. Presupunem, prin reducere la absurd, că pentru orice n există $m > n$ cu proprietatea $F(x_m) \cap \Omega \neq \emptyset$. Se obţine astfel un şir pentru care are loc (iii) şi deci $F(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset$, contradicţie.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Fie V deschisă astfel încât $F(x_0) \subset V$. Prin reducere la absurd, presupunem că pentru orice vecinătate U a lui x_0 există $x_U \in U$ astfel încât $F(x_U) \not\subset V$. Se obţine un şir convergent la x_0 care contrazice (iv). $\square$

Teorema 4 *Fie X şi Y spaţii metrice, $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie şi $x_0 \in \mathrm{Dom}(F)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Multifuncţia* F *este inferior semicontinuă în* x_0*;*

(ii) *Pentru orice* $y \in F(x_0)$ *şi orice* V*, vecinătate deschisă a lui* y*, există* U*, vecinătate a lui* x_0*, astfel încât pentru orice* $x \in U \cap \mathrm{Dom}(F)$ *avem* $F(x) \cap V \neq \emptyset$;

(iii) *Pentru orice* $y \in F(x_0)$ *şi orice şir* $(x_n) \subset \mathrm{Dom}(F)$ *cu* $x_n \to x_0$*, există şirul* (y_n) *cu* $y_n \in F(x_n)$ *pentru orice* n*, astfel încât* $y_n \to y$*.*

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$ Fie $y \in F(x_0)$ şi V o vecinătate deschisă a lui y. Avem $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ şi deci există U, vecinătate a lui (x_0), astfel încât pentru $x \in U \cap \mathrm{Dom}(F)$ avem $F(x) \cap V \neq \emptyset$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Fie $y \in F(x_0)$ şi fie şirul $(x_n) \subset \mathrm{Dom}(F)$ cu $x_n \to x_0$. Considerăm $V = S(y, 1/n)$, aplicăm (ii) şi deducem că pentru fiecare n există U_n, vecinătate pentru x_0, astfel încât, dacă $x \in U_n$, avem $F(x) \cap S(y, 1/n) \neq \emptyset$. Prin urmare, există şirul (k_n), strict crescător, astfel încât pentru orice $i \geq k_n$ există $y_i \in F(x_i) \cap S(y, 1/n)$. Construim şirul

$$y_{k_1}, y_{k_1+1}, \cdots, y_{k_2}, y_{k_2+1}, \cdots, y_{k_3}, \cdots$$

Acest şir satisface condiţiile cerute de (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$ Fie V deschisă astfel încât $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$. Prin reducere la absurd, presupunem că pentru orice U, vecinătate a lui x_0, există $x_U \in U \cap \mathrm{Dom}(F)$ astfel încât $F(x_U) \cap V = \emptyset$. Construim astfel un şir (x_n), $x_n \to x_0$, ceea ce contrazice (iii). □

O multifuncţie care este în acelaşi timp superior semicontinuă şi inferior semicontinuă se numeşte continuă. Să vedem care este legătura dintre continuitatea definită mai sus şi cea în metrica Pompeiu–Hausdorff. Amintim că dacă Y este spaţiu metric şi $I(Y)$ este familia mulţimilor închise şi nevide din Y atunci

$$\delta(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A)\} \tag{5}$$

este o metrică extinsă pe $I(Y)$. Pentru a simplifica scrierea să mai notăm

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B), \tag{6}$$

astfel că

$$\delta(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Distanţa $e(A, B)$ prezentată mai sus a fost introdusă şi utilizată în analiza complexă de Dimitrie Pompeiu în teza sa de doctorat publicată în 1905. Pentru $e(A, B)$

Pompeiu a utilizat termenul de *"écart"* al mulţimii A relativ la mulţimea B. Tot Pompeiu a introdus metrica

$$\gamma(A,B) = e(A,B) + e(B,A)$$

pe spaţiul mulţimilor nevide şi compacte din plan. Felix Hausdorff, în cartea *Gründzuge der Mengenlehre* [44] din 1914, a extins definiţia la spaţii metrice şi a introdus metrica $\delta(\cdot,\cdot)$ echivalentă evident cu metrica $\gamma(\cdot,\cdot)$ introdusă de Pompeiu.

Teorema 5 *Fie X şi Y spaţii metrice şi fie $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie cu valori închise şi nevide.*

(i) Dacă F este superior semicontinuă în x_0 atunci funcţia

$$x \mapsto e(F(x), F(x_0))$$

este continuă în x_0. Reciproca este adevărată dacă $F(x_0)$ este compactă.

(ii) Dacă funcţia

$$x \mapsto e(F(x_0), F(x))$$

este continuă în x_0 atunci F este inferior semicontinuă în x_0. Reciproca este adevărată dacă $F(x_0)$ este compactă.

(iii) Dacă F are valori compacte atunci continuitatea ei în x_0 este echivalentă cu continuitatea funcţiei $x \mapsto \delta(F(x), F(x_0))$ în x_0.

Demonstraţie. Fie $x_n \to x_0$, $\varepsilon > 0$ şi

$$V = \bigcup_{y \in F(x_0)} S(y, \varepsilon).$$

Deoarece F este superior semicontinuă în x_0, există n_ε astfel încât pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $F(x_n) \subset V$. Rezultă imediat că $e(F(x_n), F(x_0)) \leq \varepsilon$ pentru $n \geq n_\varepsilon$. Pentru reciprocă, fie W deschisă cu $F(x_0) \subset W$. Cum $F(x_0)$ este compactă, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $V \subset W$. Pentru a demonstra acest fapt considerăm funcţia continuă $f(y) = d(y, X \setminus V)$ care-şi atinge minimul pe mulţimea compactă $F(x_0)$. Fie acest minim $\varepsilon' > 0$. Valoarea $\varepsilon = \varepsilon'/2$ satisface condiţia cerută. Pe de altă parte, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru $x \in U$ avem $e(F(x), F(x_0)) < \varepsilon/2$, ceea ce implică uşor că $F(x) \subset V$. (ii) Fie V deschisă cu $V \cap F(x_0) \neq \emptyset$. Presupunem, prin reducere la absurd, că există un şir (x_n) cu $x_n \to x_0$ şi $F(x_n) \cap V = \emptyset$ pentru orice n. Fie $y_0 \in V \cap F(x_0)$ şi $S(y_0, r) \subset V$. Atunci

$$S(y_0, r) \cap F(x_n) = \emptyset, \ \forall n \in \mathbf{N},$$

ceea ce spune că şirul $(d(y_0, F(x_n)))$ nu converge la zero. De aici rezultă că nici şirul $(e(F(x_0), F(x_n)))$ nu converge la zero, ceea ce este o contradicţie.

Pentru reciprocă, pesupunem că F este inferior semicontinuă în x_0 şi că $F(x_0)$ este compactă. Acoperim $F(x_0)$ cu un număr finit de sfere $S(y_i, \varepsilon),\ i = 1, \cdots, n$, cu $y_i \in F(x_0)$. Există U_i, vecinătate pentru x_0, astfel încât $F(x) \cap S(y_i, \varepsilon) = \emptyset$ pentru $x \in U_i$. Fie

$$U = \cap_{i=1}^{n} U_i$$

şi $y \in F(x_0)$. Atunci există i astfel încât $y \in S(y_i, \varepsilon)$. Avem

$$d(y, F(x)) \leq \rho(y, y_i) + d(y_i, F(x)) < 2\varepsilon,$$

deci $e(F(x_0), F(x)) \leq 2\varepsilon$ pentru $x \in U$. Punctul (iii) este consecinţă a primelor două. □

Următorul exemplu arată că ipoteza $F(x_0)$ compactă este esenţială. Fie

$$X = \{0, 1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots\},$$

$Y = \mathbf{R}$ şi $F : X \rightsquigarrow Y$ definită prin $F(1/n) = \{0, 1, \cdots, n\}$ şi $F(0) = \mathbf{N}$. Multifuncţia F este inferior semicontinuă în 0 pentru că, dacă V este deschisă şi intersectează $F(0) = \mathbf{N}$, atunci V intersectează $F(1/n)$ pentru orice n suficient de mare. Pe de altă parte, se vede uşor că $e(F(0), F(1/n)) \to \infty$ pentru $n \to \infty$. O proprietate remarcabilă a funcţiilor continue este aceea că au graficul închis. Această proprietate se regăseşte la multifuncţiile superior semicontinue.

Teorema 6 *Fie X şi Y spaţii metrice şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie superior semicontinuă şi cu valori închise. Presupunem că* $\mathrm{Dom}(F)$ *este mulţime închisă. Atunci* $\mathrm{Graf}(F)$ *este mulţime închisă în $X \times Y$.*

Demonstraţie. Fie $((x_n, y_n))$ un şir din $\mathrm{Graf}(F)$ convergent la (x_0, y_0). Presupunem că $(x_0, y_0) \notin \mathrm{Graf}(F)$, deci $y_0 \in Y \setminus F(x_0)$. Deoarece $F(x_0)$ este mulţime închisă, din faptul că Y este regulat, există mulţimile deschise şi disjuncte D_1 şi D_2 cu $y_0 \in D_1$ şi $F(x_0) \subset D_2$. Din Teorema 3 (iv), pentru n suficient de mare avem $F(x_n) \subset D_2$. Deci $y_n \in D_2$ pentru n suficient de mare, ceea ce contrazice faptul că $y_n \to y_0$. □

Proprietatea de mai sus nu mai este adevărată în cazul multifuncţiilor inferior semicontinue. Este uşor de văzut că multifuncţia $F : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{pentru } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{pentru } x = 0, \end{cases}$$

nu are grafic închis. Intr-adevăr, şirul $(1/n, 1) \in \mathrm{Graf}(F)$ dar $(0, 1) \notin \mathrm{Graf}(F)$. După cum am precizat deja, multifuncţia F este inferior semicontinuă.

In cazul funcţiilor $f : X \to Y$, dacă Y este compact şi funcţia are grafic închis atunci ea este continuă. In cazul multifuncţiilor, după cum vom vedea mai jos, faptul că graficul este închis implică semicontinuitatea superioară. Mai întâi să prezentăm un rezultat de comportare pentru intersecţia a două multifuncţii.

Amintim că un spaţiu topologic este normal dacă, pentru orice două submulţimi închise şi disjuncte A şi B, există două mulţimi disjuncte şi deschise D_1 şi D_2 cu $A \subset D_1$ şi $B \subset D_2$. In Teorema 1.1 am demonstrat că spaţiile metrice sunt normale.

Teorema 7 *Fie X şi Y spaţii topologice şi $F_1, F_2 : X \rightsquigarrow Y$ astfel încât $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset$, pentru orice $x \in X$. Fie $F : X \rightsquigarrow Y$ definită prin $F(x) = F_1(x) \cap F_2(x)$.*
(i) Presupunem că Y este spaţiu normal. Dacă F_1 şi F_2 sunt superior semicontinue cu valori închise atunci F este superior semicontinuă.

(ii) Dacă F_1 este superior semicontinuă, are valori compacte iar $\mathrm{Graf}(F_2)$ este mulţime închisă atunci F este superior semicontinuă.

Demonstraţie. (i) Fie D deschisă în Y şi fie

$$A = \{x \in X;\ F_1(x) \cap F_2(x) \subset D\}.$$

Este clar că pentru $x \in A$ avem $F_1(x) \cap (F_2(x) \setminus D) = \emptyset$. Mulţimile $F_1(x)$ şi $F_2(x) \setminus D$ sunt închise şi ca atare există V_1 şi V_2 deschise şi disjuncte, cu $F_1(x) \subset V_1$ şi $F_2(x) \setminus D \subset V_2$. Există U_1 şi U_2, vecinătăţi ale lui x, astfel încât $F_1(U_1) \subset V_1$ şi $F_2(U_2) \subset V_2 \cup D$. Obţinem

$$F(U_1 \cap U_2) \subset V_1 \cap (V_2 \cup D) \subset D.$$

(ii) Fie $x_0 \in X$ şi V mulţime deschisă astfel încât $F(x_0) \subset V$. Dacă $F_1(x_0) \subset V$, din faptul că F_1 este superior semicontinuă în x_0, rezultă că există U, vecinătate a lui x_0, astfel încât pentru $x \in U$ avem $F_1(x) \subset V$. Prin urmare, $F(x) \subset V$, ceea ce antrenează semicontinuitatea superioară a lui F în x_0. Dacă $F_1(x_0) \not\subset V$, considerăm mulţimea compactă

$$K = F_1(x_0) \cap (Y \setminus V).$$

Pentru fiecare $y \in K$, $y \notin F_2(x_0)$ şi deci $(x_0, y) \notin \mathrm{Graf}(F_2)$. Având în vedere că $\mathrm{Graf}(F_2)$ este mulţime închisă, există $U(y)$, vecinătate deschisă a lui x_0, şi $W(y)$, vecinătate deschisă a lui y, astfel încât

$$\mathrm{Graf}(F_2) \cap (U(y) \times W(y)) = \emptyset.$$

Rezultă că pentru orice $x \in U(y)$ avem

$$F_2(x) \cap W(y) = \emptyset. \tag{7}$$

Familia $\{W(y);\ y \in K\}$ este o acoperire deschisă a mulţimii compacte K şi deci există o subacoperire finită $\{W(y_i);\ i = 1, 2, ..., n\}$. Fie

$$W = \bigcup_{i=1}^{n} W(y_i).$$

Avem $K \subset W$, deci $F_1(x_0) \subset W \cup V$. Deoarece $W \cup V$ este deschisă iar F_1 este superior semicontinuă în x_0, există U, vecinătate deschisă a lui x_0, astfel încât

$$F_1(U) \subset W \cup V. \tag{8}$$

Punând

$$U_1 = U \cap \bigcap_{i=1}^{n} U(y_i),$$

din (7) şi (8) obţinem $F_1(U_1) \subset W \cup V$ şi $F_2(U_1) \cap W = \emptyset$ deci $(F_1 \cap F_2)(U_1) \subset V$, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Corolarul 1 *Fie $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie cu valori nevide şi cu grafic închis. Dacă Y este spaţiu compact atunci F este superior semicontinuă.*

Demonstraţie. Se aplică Teorema 7 (*ii*) cu $F_2(x) = Y$ pentru orice $x \in X$. $\square$

Pentru a obţine proprietăţi de semicontinuitate inferioară pentru $F_1 \cap F_2$, ipotezele sunt destul de severe şi nu le vom prezenta aici. Problema **??** dă un exemplu când intersecţia nu este inferior semicontinuă iar F_1 şi F_2 au proprietăţi destul de bune. Problema **??** arată că ipoteza de compactitate a lui Y în Corolarul 1 este esenţială. Există multifuncţii cu grafic închis şi cu valori compacte care nu sunt superior semicontinue.

O altă proprietate a funcţiilor continue care se regăseşte la multifuncţiile superior semicontinue este aceea că imaginea unei mulţimi compacte este compactă. Rezultatul nu este valabil pentru multifuncţii inferior semicontinue. Există multifuncţii inferior semicontinue cu valori compacte definite pe mulţimi compacte, care au mulţimea valorilor nemărginită. Vezi Problema **??**.

Teorema 8 *Fie X un spaţiu compact şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie superior semicontinuă cu valori nevide şi compacte. Atunci mulţimea $F(X)$ este compactă.*

Demonstraţie. Fie $\{D_i; i \in I\}$ o acoperire deschisă a lui $F(X)$. Deoarece $F(x)$ este compactă, pentru fiecare $x \in X$ există $n(x) \in \mathbf{N}$ încât

$$F(x) \subset \bigcup_{1 \le k \le n(x)} D_{i_k}.$$

Să notăm membrul drept al incluziunii precedente cu $D(x)$. Deoarece F este superior semicontinuă, există $U(x)$, vecinătate deschisă a lui x, astfel încât

$$F(U(x)) \subset D(x).$$

Familia $\{U(x); x \in X\}$ este acoperire a lui X şi, cum X este compact, există $p \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$F(X) \subset \bigcup_{1 \le j \le p} F(U(x_j)) \subset \bigcup_{1 \le j \le p} D(x_j) = \bigcup_{1 \le j \le p} \bigcup_{1 \le k \le n(x_j)} D_{i_k}.$$

□

In continuare avem în vedere Exemplul 2. Ne interesează modul în care proprietăţi de continuitate ale funcţiei f şi ale multifuncţiei U se transferă la multifuncţiile F şi G definite de (1), respectiv (2).

Fie deci $U : X \rightsquigarrow Z$, $f : X \times Z \to Y$ şi $G : X \rightsquigarrow Y$,

$$G(x) = \{f(x,u);\ u \in U(x)\}.$$

Propoziţia 2 *Presupunem că X, Y şi Z sunt spaţii metrice.*

(i) Dacă multifuncţia U este superior semicontinuă cu valori nevide şi compacte iar f este continuă atunci multifuncţia G este superior semicontinuă.

(ii) Dacă U are valori nevide şi este inferior semicontinuă iar f este continuă atunci G este inferior semicontinuă.

Demonstraţie. (i) Fie $x_0 \in X$ şi V o mulţime deschisă cu proprietatea $G(x_0) \subset V$. Mulţimea V este vecinătate pentru orice $f(x_0,u)$ cu $u \in U(x_0)$. Deoarece f este continuă, există η_u şi δ_u astfel încât, dacă $(y,v) \in S(x_0,\eta_u) \times S(u,\delta_u)$, avem $f(y,v) \in V$. Deoarece $U(x_0)$ este compactă, există $\{S(u_i,\delta_{u_i});\ i = 1,2,...,n\}$ o acoperire a mulţimii $U(x_0)$. Având în vedere că multifuncţia U este superior semicontinuă, există $\eta_0 > 0$ astfel încât pentru orice $x \in S(x_0,\eta_0)$ avem

$$U(x) \subset \bigcup_{i=1}^{n} S(u_i,\delta_{u_i}).$$

Luând
$$\eta = \min\{\eta_0, \eta_{u_i}, i = 1, \cdots, n\},$$
avem $G(x) \subset V$ pentru orice $x \in S(x_0, \eta)$, ceea ce arată că multifuncţia G este superior semicontinuă.

(ii) Vom folosi caracterizarea cu şiruri a semicontinuităţii inferioare dată de Teorema 4. Fie şirul (x_n) convergent la x şi $y \in G(x)$. Există $u \in U(x)$ astfel încât $y = f(x, u)$. Deoarece multifuncţia U este inferior semicontinuă, există şirul (u_n) convergent la u astfel încât $y_n = f(x_n, u_n) \in F(x_n)$ şi $y_n \to y$. Demonstraţia este încheiată. $\square$

Continuăm cu Exemplul 3. Fie deci X şi Y spaţii metrice, $G : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie cu valori nevide, funcţia $f : X \times Y \to \mathbf{R}$, funcţia $h : X \to \overline{\mathbf{R}}$ definită prin
$$h(x) = \sup_{y \in G(x)} f(x, y)$$
şi multifuncţia $F : X \rightsquigarrow Y$ definită prin
$$F(x) = \{y \in G(x);\ h(x) = f(x, y)\}.$$

Propoziţia 3

(i) *Presupunem că funcţia f este inferior semicontinuă pe $X \times Y$ şi multifuncţia G este inferior semicontinuă în x_0. Atunci funcţia h este inferior semicontinuă în x_0.*

(ii) *Presupunem că f este superior semicontinuă pe $X \times Y$, G este superior semicontinuă în x_0 şi $G(x_0)$ este compactă. Atunci h este superior semicontinuă în x_0.*

(iii) *Dacă f este continuă pe $X \times Y$, G este continuă pe X şi are valori compacte atunci h este continuă iar F este superior semicontinuă.*

Demonstraţie. (i) Fie $\varepsilon > 0$. Există $y_0 \in G(x_0)$ astfel încât
$$h(x_0) - \varepsilon/2 < f(x_0, y_0).$$
Deoarece f este inferior semicontinuă în x_0, există U_1 şi V, vecinătăţi pentru x_0 şi respectiv y_0, astfel încât pentru orice $x \in U_1$ şi $y \in V$ avem
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) - \varepsilon/2.$$

Folosim acum faptul că multifuncţia G este inferior semicontinuă în x_0 şi deducem că există U_2, vecinătate a lui x_0, astfel încât $G(x) \cap V \neq \emptyset$ pentru $x \in U_2$. Fie $U = U_1 \cap U_2$. Pentru orice $x \in U$ există $y \in G(x)$ astfel încât

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) - \varepsilon/2 \geq h(x_0) - \varepsilon,$$

deci $h(x) \geq h(x_0) - \varepsilon$, ceea ce arată că h este inferior semicontinuă.

(*ii*) Avem de arătat că pentru orice $\varepsilon > 0$ există U, vecinătate a lui x_0, astfel încât $h(x) \leq h(x_0) + \varepsilon$ pentru orice $x \in U$. Cum f este superior semicontinuă, pentru orice $y \in V$ există $V(y)$, vecinătate deschisă a lui y, şi $U(y)$, vecinătate a lui x_0, astfel încât

$$f(x, z) \leq f(x_0, y) + \varepsilon$$

pentru orice $x \in U(y)$ şi $z \in V(y)$. Deoarece mulţimea $G(x_0)$ este compactă, există n vecinătăţi $V(y_i)$, $i = 1, ..., n$, care o acoperă. Fie

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i).$$

Avem V deschisă, $G(x_0) \subset V$ şi G superior semicontinuă în x_0. Prin urmare, există U_0, vecinătate a lui x_0, astfel încât $G(x) \subset V$ pentru $x \in U_0$. Considerăm acum

$$U = U_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n} U(y_i).$$

Când $x \in U$ şi $y \in G(x)$ avem $y \in V$, deci există i astfel încât $y \in V(y_i)$. Acest fapt implică

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_i) + \varepsilon \leq h(x_0) + \varepsilon.$$

Obţinem astfel $h(x) \leq h(x_0) + \varepsilon$ pentru orice $x \in U$, ceea ce trebuia demonstrat.

(*iii*) Prima parte rezultă combinând (i) cu (ii). Să arătăm că multifuncţia F este superior semicontinuă. Pentru aceasta, să observăm că F se scrie în forma

$$F(x) = F(x) \cap K(x),$$

unde multifuncţia $K : X \rightsquigarrow Y$ este definită prin

$$K(x) = \{y \in Y;\ h(x) = f(x, y)\}.$$

Deoarece funcţiile f şi h sunt continue rezultă că Graf(K) este mulţime închisă. Este clar că F are valori nevide şi deci putem aplica Teorema 6 (ii) pentru a deduce că multifuncţia F este superior semicontinuă. $\square$

Corolarul 2 *Fie X şi Y spaţii metrice.*

(i) *Dacă $G : X \rightsquigarrow Y$ este o multifuncţie inferior semicontinuă cu valori nevide, atunci funcţia*
$$(x, y) \mapsto d(y, G(x))$$
este superior semicontinuă.

(ii) *Dacă $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ este superior semicontinuă şi Y este spaţiu compact, atunci funcţia*
$$x \mapsto \sup_{y \in Y} f(x, y)$$
este superior semicontinuă.

Demonstraţie. (i) Se aplică Propoziţia 3 (i) unde în loc de X se ia $X \times Y$, în loc de f se ia funcţia $(x, y, z) \mapsto -\rho(y, z)$ iar în loc de G se ia multifuncţia $(x, y) \rightsquigarrow G(x)$.

(ii) Se aplică Propoziţia 3 (ii) cu $G(x) = Y$ pentru orice $x \in X$. □

In continuare studiem modul cum se transmit proprietăţile de continuitate ale multifuncţiei $F : X \rightsquigarrow Y$ la multifuncţiile $\overline{F} : X \rightsquigarrow Y$ şi $\mathrm{conv}F : X \rightsquigarrow Y$ definite prin $\overline{F}(x) = \overline{F(x)}$ şi respectiv $\mathrm{conv}F(x) = \mathrm{conv}(F(x))$. Precizăm că $\overline{A}$ înseamnă închiderea mulţimii A iar $\mathrm{conv}(A)$ notează înfăşurătoarea convexă a mulţimii A.

Propoziţia 4 *Fie $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie cu valori nevide.*

(i) *Multifuncţia F este inferior semicontinuă dacă şi numai dacă multifuncţia $\overline{F}$ este inferior semicontinuă.*

(ii) *Dacă Y este spaţiu normal şi F este superior semicontinuă atunci $\overline{F}$ este superior semicontinuă.*

Demonstraţie. (i) Afirmaţia rezultă uşor având în vedere că, dacă D este deschisă în Y şi A este o submulţime a lui Y, atunci $A \cap D \neq \emptyset$ dacă şi numai dacă $\overline{A} \cap D \neq \emptyset$.

(ii) Fie $x_0 \in X$, V deschisă în Y astfel încât $\overline{F(x_0)} \subset V$. Deoarece Y este spaţiu normal, există o mulţime deschisă D_1 astfel încât
$$F(x_0) \subset \overline{F(x_0)} \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset D$$
(vezi [30, p.86]). Folosim acum faptul că F este superior semicontinuă pentru a deduce că există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $F(U) \subset D_1$. Este clar că
$$\overline{F(U)} \subset \overline{D_1} \subset D,$$
ceea ce încheie demonstraţia. □

Multifuncţia $F : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$, definită prin $F(x) = (x-1, x+1)$, nu este superior semicontinuă dar $\overline{F}$ este superior semicontinuă. Deci reciproca de la (ii) nu este adevărată (vezi Problema **??**). De asemenea condiţia ca Y să fie normal este esenţială. Problema **??** oferă un exemplu de multifuncţie superior semicontinuă F pentru care $\overline{F}$ nu este superior semicontinuă.

Propoziţia 5 *Fie X spaţiu topologic, Y spaţiu normat şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie cu valori nevide.*

(i) *Dacă F este inferior semicontinuă atunci* conv$F$ *este inferior semicontinuă.*

(ii) *Dacă F este superior semicontinuă şi are valori compacte atunci* conv$F$ *este superior semicontinuă.*

Demonstraţie. (i) Folosim Teorema 4 (ii). Fie deci $y \in (\mathrm{conv}F)(x_0)$ şi $V = S(y, \varepsilon)$. Există $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ în $[0,1]$ cu $\sum \lambda_i = 1$ şi $g_1, \cdots, g_n$ în $F(x_0)$ astfel încât $y = \sum \lambda_i y_i$. Fie $V_i = S(y_i, \varepsilon)$. Deoarece F este inferior semicontinuă în x_0, există U_i, vecinătăţi ale lui x_0, astfel încât pentru $x \in U_i$ avem $F(x) \cap V_i \neq \emptyset$. Fie $U = \cap U_i$. Arătăm că dacă $x \in U$ atunci $\mathrm{conv}F(x) \cap V \neq \emptyset$. Pentru aceasta fie $z_i \in F(x) \cap V_i$. Este clar că $z = \sum \lambda_i z_i$ satisface condiţiile $z \in \mathrm{conv}F(x)$ şi $\|z - y\| < \varepsilon$, deci $z \in (\mathrm{conv}F)(x) \cap V$. ($ii$) Vom folosi Teorema 5 ($i$) şi faptul că $e(A, B) < \varepsilon$ implică

$$e(\mathrm{conv}A, \mathrm{conv}B) \leq \varepsilon.$$

Vezi Problema **??**. □

Studiem acum modul cum se transmit proprietăţile de semicontinuitate la compunerea multifuncţiilor. Precizăm că dacă $F : X \rightsquigarrow Y$ şi $G : Y \rightsquigarrow Z$ sunt două multifuncţii, definim multifuncţia $G \circ F : X \rightsquigarrow Z$ prin

$$(G \circ F)(x) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y).$$

Propoziţia 6 *Fie X, Y, Z spaţii topologice, $F : X \rightsquigarrow Y$ şi $G : Y \rightsquigarrow Z$ multifuncţii stricte.*

(i) *Dacă F şi G sunt inferior semicontinue atunci $G \circ F$ este inferior semicontinuă.*

(ii) *Dacă F şi G sunt superior semicontinue atunci $G \circ F$ este superior semicontinuă.*

Demonstraţie. (i) Fie $x_0 \in X$, $y_0 \in F(x_0)$ şi V deschisă în Z astfel încât $G(y_0) \cap V \neq \emptyset$. Deoarece multifuncţia G este inferior semicontinuă în y_0 există W, vecinătate deschisă a lui y_0, astfel încât $G(y) \cap V \neq \emptyset$ pentru oricare $y \in W$. Având în vedere că $F(x_0) \cap W \neq \emptyset$ şi F este inferior semicontinuă în x_0 există U, vecinătate a lui x_0, astfel încât $F(x) \cap W \neq \emptyset$ pentru $x \in U$. Vom arăta că

$$(G \circ F)(x) \cap V \neq \emptyset$$

pentru $x \in U$. Intr-adevăr, pentru $x \in U$ există $y \in F(x) \cap W$, deci există $z \in G(y) \cap V$. Este clar că $z \in (G \circ F)(x)$, ceea ce încheie demonstraţia punctului (i). Demonstraţia punctului (ii) o lăsăm ca exerciţiu. $\square$

In cazul când X şi Y sunt spaţii normate, se pot defini şi alte concepte de continuitate pe care le vom discuta în continuare.

Definiţia 3 Fie X, Y spaţii normate şi $F : D \subset X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie cu valori nevide. Spunem că F este $\varepsilon - \delta$ *superior semicontinuă* în $x_0 \in D$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$F(D \cap S(x_0, \delta)) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon).$$

Aşadar, în Definiţia 3 se iau mulţimi deschise V care includ $F(x_0)$ numai de forma $F(x_0) + S(0, \varepsilon)$. Este clar că această noţiune este mai generală decât cea introdusă în Definiţia 1. Problema **??** dă un exemplu de multifuncţie care este superior semicontinuă dar nu este $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuă. Dacă $F(x_0)$ este compactă, cele două noţiuni sunt echivalente. Intr-adevăr, în acest caz pentru orice mulţime deschisă V cu $F(x_0) \subset V$ există $\varepsilon > 0$ astfel încât $F(x_0) + S(0, \varepsilon) \subset V$.

Definiţia 4 Fie X şi Y spaţii normate şi $F : D \subset X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie cu valori nevide. Spunem că F este $\varepsilon - \delta$ *inferior semicontinuă* în $x_0 \in D$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$F(x_0) \subset F(x) + S(0, \varepsilon)$$

pentru $x \in D \cap S(x_0, \delta)$.

De data aceasta noţiunea "$\varepsilon - \delta$ inferior semicontinuă" este mai restrictivă decât "inferior semicontinuă". Intr-adevăr, presupunem că F este $\varepsilon - \delta$ inferior semicontinuă în x_0, luăm $y_0 \in F(x_0)$, V o vecinătate a lui y_0, $\varepsilon > 0$ astfel încât $S(y_0), \varepsilon) \subset V$ şi $\delta > 0$ din Definiţia 4. Dacă $x \in S(x_0, \delta) \cap D$, există $y_1 \in S(0, \varepsilon)$ şi $y_2 \in F(x)$

astfel încât $y_0 = y_1 + y_2$. Deci $y_2 \in F(x) \cap S(y_0, \varepsilon)$, ceea ce arată că $F(x) \cap V \neq \emptyset$ pentru $x \in S(x_0, \delta)$.

Cele două noţiuni devin echivalente când $F(x_0)$ este compactă. Pentru a demonstra aceasta, presupunem că F este inferior semicontinuă în x_0, fixăm $\varepsilon > 0$, acoperim $F(x_0)$ cu familia

$$\{S(y_i, \varepsilon/2); i = 1, \cdots, n\}, \quad y_i \in F(x_0),$$

considerăm δ_i astfel încât

$$F(x) \cap S(y_i, \varepsilon/2) \neq \emptyset$$

pentru $x \in S(x_0, \delta_i)$ şi luăm

$$\delta = \min\{\delta_i;\ i = 1, \cdots, n\}$$

ceea ce tebuia demonstrat.

Multifuncţia $F : [0, 1] \rightsquigarrow \mathbf{R}^2$ definită prin $F(x) = \{(t, xt);\ t > 0\}$ este inferior semicontinuă dar nu este $\varepsilon - \delta$ inferior semicontinuă după cum arată Problema **??**.

Să prezentăm acum noţiunea de multifuncţie superior hemicontinuă. Fie Y spaţiu normat, A o submulţime nevidă a lui Y şi

$$\sigma(A, y^*) = \sup\{\langle y^*, y\rangle;\ y \in A\}, \quad y^* \in Y^*.$$

Funcţia $y^* \to \sigma(A, y^*)$ pentru $y^* \in Y^*$ se numeşte *funcţia suport* a mulţimii A.

Fie $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie tare–slab superior semicontinuă, adică F este superior semicontinuă când considerăm pe X topologia tare şi pe Y topologia slabă. Fie $y^* \in Y^*$, $x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$. Este clar că

$$V = \{y \in Y;\ \langle y^*, y\rangle < \sigma(F(x_0), y^*) + \varepsilon\}$$

este o mulţime slab deschisă ce conţine $F(x_0)$. Există deci o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $F(U) \subset V$. Aceasta implică faptul că pentru $x \in U$ avem

$$\sigma(F(x), y^*) \leq \sigma(F(x_0), y^*) + \varepsilon,$$

ceea ce spune că funcţia $x \mapsto \sigma(F(x), y^*)$ este superior semicontinuă în x_0. Acest fapt conduce la

Definiţia 5 Fie X şi Y spaţii normate şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie cu valori nevide. Spunem că F este *superior hemicontinuă* în x_0 dacă pentru fiecare $y^* \in Y^*$ funcţia

$$x \mapsto \sigma(F(x), y^*)$$

este superior semicontinuă în x_0.

Am demonstrat mai sus că dacă F este tare–slab superior semicontinuă atunci este superior hemicontinuă. Reciproca are loc în condiţii suplimentare asupra lui F şi anume atunci când F are valori convexe şi slab compacte.

3 Incluziuni diferenţiale pe mulţimi închise

Incepem această secţiune cu o teoremă de convergenţă, utilă în stabilirea existenţei soluţiilor unor incluziuni diferenţiale prin metode aproximative.

Teorema 9 *Fie $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie superior hemicontinuă cu valori convexe şi închise, X şi Y fiind spaţii Banach. Fie I un interval în* $\mathbf{R}$ *şi fie şirurile de funcţii măsurabile $x_n : I \to X$ şi $y_n : I \to Y$ satisfăcând condiţiile:*

(i) *Pentru aproape toţi $t \in I$ şi pentru orice V, vecinătate a originii în $X \times Y$, există $n_0 = n_0(t, V)$ astfel încât pentru $n \geq n_0$ avem*

$$(x_n(t), y_n(t)) \in \mathrm{Graf}(F) + V.$$

(ii) *Şirul (x_n) converge aproape peste tot (pe scurt, a.p.t.) la o funcţie $x : I \to X$.*

(iii) *Şirul $(y_n) \in L^1(I, Y)$ şi converge slab la $y \in L^1(I, Y)$.*

In aceste condiţii, pentru aproape toţi $t \in I$ avem $(x(t), y(t)) \in \mathrm{Graf}(F)$.

Demonstraţie. Deoarece (y_n) converge slab în $L^1(I, Y)$ la y, există un şir de combinaţii convexe de forma

$$v_n = \sum_{i \geq n} a_n^i y_i \in \mathrm{conv}\{y_i;\ i \geq n\}$$

astfel încât v_n converge tare la y. Există deci un subşir (notat tot cu v_n) astfel încât $v_n(t) \to y(t)$ a.p.t. $t \in I$. Fie acum $t \in I$ astfel încât $x_n(t) \to x(t)$, $v_n(t) \to y(t)$ şi are loc (i). Vom arăta că $y(t) \in F(x(t))$. Pentru aceasta, fixăm $y^* \in Y^*$ astfel încât $\sigma(F(x(t)), y^*) < \infty$ şi fie $\lambda > \sigma(F(x(t)), y^*)$. Deoarece F este superior hemicontinuă, există U, vecinătate a lui 0 în X, astfel încât $\sigma(F(u), y^*) < \lambda$ pentru $u \in x(t) + U$. Fie k_0 astfel încât pentru $n \geq k_0$ avem

$$x_n(t) \in x(t) + \tfrac{1}{2}U.$$

Din (i), dacă fixăm $\gamma > 0$, exisă $n_0 \geq k_0$ şi $(u_n, w_n) \in \mathrm{Graf}(F)$ astfel încât $u_n \in x_n(t) + \frac{1}{2}U$ şi

$$\|y_n(t) - w_n\| \leq \gamma$$

pentru $n \geq n_0$. Obţinem $u_n \in x(t) + U$ şi

$$\langle y_n(t), y^* \rangle \leq \langle w_n, y^* \rangle + \gamma \|y^*\| \leq \sigma(F(u_n), y^*) + \gamma \|y^*\| \leq \lambda + \gamma \|y^*\|.$$

Multiplicând inegalitatea cu a_n^i (vezi definiţia lui v_n) şi sumând obţinem

$$\langle v_n(t), y^* \rangle \leq \lambda + \gamma \|y^*\|$$

şi apoi

$$\langle y(t), y^* \rangle \leq \lambda + \gamma \|y^*\|.$$

Facem $\lambda \to \sigma(F(x(t)), y^*)$ şi $\gamma \to 0$ şi deducem

$$\langle y(t), y^* \rangle \leq \sigma(F(x(t)), y^*).$$

Deoarece $F(x(t))$ este convexă şi închisă obţinem $y(t) \in F(x(t))$, ceea ce trebuia demonstrat.

Amintim că pentru o mulţime A convexă şi închisă într-un spaţiu local convex separat Y avem

$$A = \{y \in Y; \langle y, y^* \rangle \leq \sigma(A, y^*), \forall y^* \in Y^*\},$$

fapt uşor de dovedit folosind o teoremă de separare a mulţimilor convexe prin hiperplane [79, p.111]. $\square$

Să aplicăm Teorema 7 la obţinerea unor rezultate de existenţă pentru incluziuni diferenţiale pe mulţimi închise. Să considerăm incluziunea diferenţială

$$x'(t) \in F(x(t)), \quad t \geq 0, \tag{9}$$

unde $F : D \rightsquigarrow \mathbf{R}^n$ este o multifuncţie cu valori nevide, D fiind o submulţime a lui $\mathbf{R}^p$. Prin soluţie a incluziunii diferenţiale (9) înţelegem o funcţie $x : [0, T] \to D$ absolut continuă şi care satisface (9) aproape peste tot.

Teoria incluziunilor diferenţiale îşi are originea în 1936 prin lucrările lui André Marchaud [63] şi Stanisław K. Zaremba [100]. Noţiunea de soluţie utilizată de ei diferă de cea dată mai sus. In 1961, Tadeusz Ważewski [98] a demonstrat că cele două noţiuni de soluţie sunt echivalente.

Problema care dorim să o discutăm în continuare este cea a existenţei soluţiilor lui (9) în cazul când D este mulţime închisă.

Spunem că D este *domeniu de viabilitate* pentru incluziunea diferenţială (9) dacă pentru orice $x_0 \in D$ există o soluţie a lui (9) cu $x(0) = x_0$. Chiar dacă F este funcţie, problema nu se încadrează în teoria clasică de tip Peano. Este clar că va fi importantă comportarea lui F în punctele din $\mathrm{Fr}(D)$. Primul rezultat semnificativ în această direcţie aparţine lui Mitio Nagumo [71] în 1942, rezultat ce dă o condiţie necesară şi suficientă de existenţă pe mulţimi închise în cazul când F este funcţie continuă. Condiţia la care facem referire, numită *condiţie de tangenţă,* foloseşte noţiunea de con tangent în sensul lui Bouligand, noţiune pe care o vom defini în continuare. Pentru detalii şi rezultate legate de conul tangent al lui Bouligand, precum şi alte conuri tangente, trimitem la [101].

Fie X un spaţiu normat şi $D \subset X$ o mulţime nevidă. Conul tangent în sensul lui Bouligand la D în punctul $x \in D$ este mulţimea

$$T_D(x) = \{v;\ \liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} d(x + hv, D) = 0\}.$$

Se verifică uşor că $T_D(x)$ este con închis iar dacă $x \in \mathrm{int}(D)$ atunci $T_D(x) = X$.

Rezultatul lui Nagumo afirmă că dacă F este o funcţie continuă şi D este închisă, atunci o condiţie necesară şi suficientă pentru ca D să fie domeniu de viabilitate pentru (9) este ca să fie îndeplinită condiţia de tangenţă

$$F(x) \in T_D(x),\ \forall x \in D.$$

Pentru cazul când F este multifuncţie, avem următorul rezultat stabilit de Jerrold W. Bebernes şi Jerry D. Schuur [13] în 1970.

Teorema 10 *Fie $D \subset \mathbf{R}^p$ o mulţime închisă şi $F : D \rightsquigarrow \mathbf{R}^p$ o multifuncţie superior semicontinuă cu valori nevide compacte şi convexe. Atunci D este domeniu de viabilitate pentru incluziunea diferenţială* (9) *dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia de tangenţă*

$$F(x) \cap T_D(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in D. \tag{10}$$

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi că (10) este necesară ca D să fie domeniu de viabilitate pentru (9). Pentru aceasta, să observăm că, deoarece F este superior semicontinuă, există un şir (t_n) cu $t_n \to 0$, $t_n > 0$, astfel încât pentru $t \leq t_n$ avem

$$F(x(t)) \subset F(x_0) + S(0, 1/2n),$$

unde $x(\cdot)$ este o soluţie pentru (9) cu $x(0) = x_0$, x_0 fiind fixat în D. Avem aşadar

$$x_0 + t_n \left(\frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} x'(s) ds \right) \in D.$$

Din cauza convexităţii lui $F(x_0)$ avem

$$w_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} x'(s) ds \in F(x_0) + B(0, 1/2n).$$

Prin urmare w_n este de forma $v_n + p_n$ cu $v_n \in F(x_0)$ şi $p_n \to 0$. Deoarece $F(x_0)$ este compactă, $v_n \to v \in F(x_0)$ (eventual pe un subşir) şi deci

$$x_0 + t_n(v + v_n - v + p_n) \in D.$$

Acest fapt implică $v \in T_D(x_0)$ şi deci $v \in F(x_0) \cap T_D(x_0)$. Să presupunem acum că are loc condiţia de tangenţă (10), să fixăm un $x_0 \in D$ şi să arătăm că există o soluţie pentru (9) cu $x(0) = x_0$. Fie $r > 0$ şi $K = D \cap B(x_0, r)$. Este clar că mulţimea K este compactă şi deci $F(K)$ este mărginită (chiar compactă după cum rezultă din Problema 8). Există $L > 0$ astfel încât $\|y\| \leq L$ pentru $y \in F(x)$ cu $x \in K$. Vom arăta că există o soluţie pentru (9) pe $[0, T]$ unde $T = r/(L+1)$. Ideea este de a construi un şir de *soluţii aproximative* şi apoi, folosind Teorema 9 să obţinem soluţia cerută. Prezentăm în continuare modul de construcţie a unui şir de soluţii aproximative. Fie $n = 1, 2, \cdots$. Din condiţia de tangenţă, pentru fiecare $y \in D$ există $h_y < 1/n$ şi $v_y \in F(y)$ astfel încât

$$d(y + h_y v_y, D) < h_y/2n.$$

Considerăm mulţimile

$$V(y) = \{x \in \mathbf{R}^p;\ d(x + h_y v_y, D) < h_y/2n\},$$

care sunt vecinătăţi deschise ale lui y. Există deci $S(y, \eta_y) \subset V(y)$ cu $\eta_y < 1/n$. Mulţimea compactă K poate fi acoperită de q astfel de sfere, $S(y(j), \eta_{y(j)})$. Pentru simplitate, să punem $\eta_j = \eta_{y(j)}$, $h_j = h_{y(j)}$, $v_j = v_{y(j)}$ şi $h = \min\{h_j;\ j = 1, \cdots, q\}$. Fie acum $x \in K$. Există j astfel încât $x \in S(y_j, \eta_j) \subset V(y_j)$ şi deci există $x_j \in D$ astfel încât

$$\|v_j - \frac{x_j - x}{h_j}\| \leq \frac{1}{h_j} d(x + h_j v_j, D) + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}.$$

Să notăm $u_j = (x_j - x)/h_j$. Am demonstrat aşadar că pentru orice $x \in K$ există $h' \in [h, 1/n]$ şi $u \in X$ astfel încât următoarele proprietăţi sunt satisfăcute:

(i) $x + h'u \in D;\ \ u \in F(K) + B(0,1);$

(ii) Există $y \in D,\ v \in F(y)$ cu $\|x - y\| \leq 1/n$ şi $\|u - v\| \leq 1/n$.

Vom nota în continuare $B = B(0,1)$ şi $C = F(K) + B$. Aplicăm această schemă pentru x_0 în loc de x şi deducem că există $h_0 \in [h, 1/n]$ şi $u_0 \in C$ astfel încât $x_1 = x_0 + h_0 u_0 \in D$ şi

$$(x_0, u_0) \in \mathrm{Graf}(F) + \frac{1}{n} B \times B.$$

Mai mult, $x_1 - x_0 \in h_0 C$, deci $\|x_1 - x_0\| \leq h_0(L+1)$, ceea ce implică $\|x_1 - x_0\| \leq r$ dacă $h_0 \leq T$, deci $x_1 \in K$. Repetăm procedeul şi deducem că există $h_1 \in [h_0, 1/n]$ şi $u_1 \in C$ astfel încât $x_2 = x_1 + h_1 u_1 \in D$,

$$(x_1, u_1) \in \mathrm{Graf}(F) + \frac{1}{n} B \times B,$$

şi $x_2 - x_0 \in (h_0 + h_1)C$. Prin urmare, $\|x_2 - x_0\| \leq (h_0 + h_1)(L+1)$ şi $\|x_2 - x_0\| \leq r$ dacă $h_0 + h_1 \leq T$. Am obţinut aşadar că $x_2 \in K$. Se continuă procedeul şi se observă că, deoarece $h_j \in [h, 1/n]$, există un întreg m astfel încât

$$h_0 + h_1 + \cdots + h_m \leq T < h_0 + h_1 + \cdots + h_{m+1}.$$

Punem

$$t_0 = 0,\ t_1 = h_0, \cdots, t_m = h_0 + \cdots + h_m,\ t_{m+1} = T$$

şi definim *soluţia aproximativă* $x_n : [0, T] \to \mathbf{R}^p$ prin

$$x_n(t) = x_{i-1} + (t - t_{i-1}) u_{i-1}$$

pentru $t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \cdots, m+1$. Să observăm că pentru $t \in (t_{i-1}, t_i)$ avem $|t - t_{i-1}| < 1/n$. De asemenea, deoarece

$$(x_{i-1}, u_{i-1}) \in \mathrm{Graf}(F) + \frac{1}{n} B \times B,$$

pentru $t \in (t_{i-1}, t_i)$ există $(y, v) \in \mathrm{Graf}(F)$ astfel încât

$$\|x_n'(t) - v\| = \|u_{i-1} - v\| \leq \frac{1}{n}$$

şi

$$\|x_n(t) - y\| = \|x_n(t) - x_{i-1}\| + \|x_{i-1} - y\| \leq \frac{1}{n}\|u_{i-1}\| + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}(L+2).$$

Aici am folosit faptul că $u_{i-1} \in C$ şi deci $\|u_{i-1}\| \leq L+1$. Am demonstrat aşadar că pentru aproape toţi $t \in [0, T]$ avem

$$(x_n(t), x_n'(t)) \in \mathrm{Graf}(F) + \varepsilon(n) B \times B$$

cu $\varepsilon(n) \to 0$ pentru $n \to \infty$, deci condiţia (i) din Teorema 9 cu $y_n = x_n'$ este îndeplinită. Avem, de asemenea, $\|x_n'(t)\| \leq L+1$ a.p.t. şi $x_n(t) \in \mathrm{conv}(K)$ pentru orice $t \in [0, T]$. Din Teorema Arzelà-Ascoli deducem că, eventual pe un subşir, $x_n(\cdot)$

converge uniform pe $[0,T]$ la o funcţie continuă $x(\cdot)$. Din Teorema lui Alaoglu [79, p.145] deducem că, eventual pe un subşir, $x_n'(\cdot)$ converge slab–stelat în $L^\infty(0,T;\mathbf{R}^n)$ şi deci slab în $L^1(0,T;\mathbf{R}^n)$ la o funcţie y. In sfârşit, deoarece

$$x_n(t) - x_n(s) = \int_s^t x_n'(\tau)d\tau,$$

avem

$$x(t) - x(s) = \int_s^t y(\tau)d\tau,$$

deci $y(t) = x'(t)$ a.p.t.

Prin urmare, toate ipotezele din Teorema 9 sunt îndeplinite şi deci $x'(t) \in F(x(t))$ a.p.t. In plus, este evident că $x(0) = x_0$. In sfârsit, deoarece $|t-t_{i-1}| \leq 1/n$, $\|u_{i-1}\| \leq L+1$, $x_{i-1} \in D$ şi mulţimea D este închisă, rezultă că $x(t) \in D$ pentru orice $t \in [0,T]$. Demonstraţia este încheiată. □

Să remarcăm că ipoteza ca F să aibă valori convexe este esenţială. Fie $F : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$ definită prin $F(x) = \{-1\}$ pentru $x > 0$, $F(0) = \{-1, 1\}$ şi $F(x) = \{1\}$ pentru $x < 0$. Multifuncţia F este superior semicontinuă, are valori compacte, condiţia de tangenţă este verificată dar incluziunea diferenţială $x'(t) \in F(x(t))$, $x(0) = 0$, nu are soluţie. Intr-adevăr, $x'(t) = -1$ dacă $x(t) > 0$, deci $x(t) = -t$ dacă $x(t) > 0$, ceea ce este absurd.

4 Selecţii, parametrizări, aproximări

Fiind dată o multifuncţie $F : X \rightsquigarrow Y$, o *selecţie* a sa este o funcţie care asociază fiecărui $x \in X$ un element din $F(x)$. Existenţa unei selecţii este asigurată de Axioma alegerii. In probleme concrete interesează existenţa unor selecţii cu anumite proprietăţi. Problema **??** oferă un exemplu (Problema mariajului) în care se pune problema existenţei selecţiilor injective. Dându-se X şi Y două mulţimi nevide şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie cu valori nevide şi finite, atunci condiţia

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(F(A)), \tag{11}$$

pentru orice mulţime finită $A \subset X$, este suficientă pentru existenţa selecţiilor injective. Ca model, considerăm următoarea problemă a mariajului, numită astfel de Hermann Weyl. Fie X mulţimea bărbaţilor (necăsătoriţi), Y mulţimea femeilor (necăsătorite) şi $F(x)$ mulţimea prietenelor bărbatului x. Condiţia (11) spune că, pentru fiecare grup de bărbaţi, numărul lor nu depăşeşte numărul femeilor prietene cu ei. De exemplu, nu este posibil ca doi bărbaţi să aibă câte o singură prietenă şi aceea comună. In această situaţie, fiecare bărbat se poate căsători cu una din prietenele sale. Vezi Problema **??** pentru rezolvare.

In continuare vom cerceta existenţa selecţiilor cu anumite proprietăţi de continuitate. Un alt aspect este acela de a se studia proprietăţile unor selecţii obţinute după reguli prescrise. De exemplu, dacă Y este spaţiu Hilbert şi $F : X \rightsquigarrow Y$ are valori nevide convexe şi închise, atunci se consideră *selecţia minimală* $f : X \to Y$ definită prin $f(x) = m(F(x))$, unde $m(F(x))$ notează elementul de normă minimă din mulţimea convexă şi închisă $F(x)$.

Teorema 11 *Dacă X este spaţiu metric, Y este spaţiu Hilbert şi $F : X \rightsquigarrow Y$ este o multifuncţie continuă cu valori nevide convexe şi închise, atunci selecţia minimală $f : X \to Y$ definită prin $f(x) = m(F(x))$ este continuă.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$ fixaţi. Vom demonstra mai întâi că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru $x \in U$ avem

$$\|f(x)\|^2 \leq \|f(x_0)\|^2 + \varepsilon. \tag{12}$$

Pentru aceasta, vom folosi proprietatea multifuncţiei F de a fi inferior semicontinuă. Schimbând eventual ε, vom demonstra de fapt că pentru $\varepsilon > 0$ există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru $x \in U$ avem

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \varepsilon.$$

Pentru a demonstra acest lucru începem prin a observa că, pentru $\varepsilon > 0$, există $y_0 \in F(x_0)$ astfel încât

$$\|y_0\| < \|f(x_0)\| + \varepsilon.$$

Aplicăm acum Teorema 4 (ii) cu $V = S(0, \|f(x_0)\| + \varepsilon)$ şi deducem că există U, vecinătate a lui x_0, astfel încât pentru orice $x \in U$ avem

$$F(x) \subset S(0, \|f(x_0)\| + \varepsilon).$$

De aici rezultă

$$m(F(x)) \in S(0, \|f(x_0)\| + \varepsilon)$$

pentru $x \in U$, ceea ce trebuia demonstrat.

Continuăm demonstraţia observând că, dacă $f(x_0) = 0$, atunci (12) implică faptul că f este continuă în x_0. Dacă $\|f(x_0)\| > 0$, folosind proprietatea multifuncţiei F de a fi superior semicontinuă, deducem că există W, vecinătate a lui x_0, astfel încât pentru $x \in W$ există $y_x \in F(x_0)$ cu

$$\|f(x) - y_x\| \leq \varepsilon / \|f(x_0)\|. \tag{13}$$

Intr-adevăr, folosind Definiţia 1 cu

$$V = F(x_0) + S(0, \varepsilon/\|f(x_0)\|)$$

deducem existenţa unei vecinătăţi W a lui x_0 astfel încât pentru $x \in W$ avem

$$F(x) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon/\|f(x_0)\|),$$

deci

$$f(x) \in F(x_0) + S(0, \varepsilon/\|f(x_0)\|),$$

şi ca atare are loc (13). Din (13) şi inegalitatea lui Cauchy deducem

$$\langle f(x_0), f(x)\rangle = \langle f(x_0), y_x\rangle + \langle f(x_0), f(x) - y_x\rangle \geq$$

$$\langle f(x_0), y_x\rangle - \varepsilon.$$

Pe de altă parte, o caracterizare variaţională a elementului de cea mai bună aproximare pentru o mulţime convexă şi închisă în spaţii Hilbert dă

$$\langle f(x_0), y - f(x_0)\rangle \geq 0$$

pentru orice $y \in F(x_0)$, ceea ce implică

$$\langle f(x_0), f(x) - f(x_0)\rangle \geq -\varepsilon. \tag{14}$$

In sfârşit, deoarece

$$\|f(x)\|^2 = \|f(x_0)\|^2 + \|f(x_0) - f(x)\|^2 + 2\langle f(x_0), f(x) - f(x_0)\rangle,$$

din (12) şi (14) avem

$$\|f(x_0) - f(x)\|^2 - 2\varepsilon \leq \|f(x_0) - f(x)\|^2 + 2\langle f(x_0), f(x) - f(x_0)\rangle \leq \varepsilon,$$

deci

$$\|f(x) - f(x_0)\|^2 \leq 3\varepsilon.$$

Demonstraţia este încheiată. □

Vom aplica Teorema 11 pentru stabilirea unui rezultat privind problema parametrizării unei multifuncţii. Spunem că multifuncţia $F : X \rightsquigarrow Y$ este *parametrizată* dacă se poate pune în evidenţă o mulţime U şi o funcţie $f : X \times U \to Y$ astfel încât

$$F(x) = f(x, U).$$

Să observăm că, dacă F are o parametrizare continuă, fixând $u_0 \in U$, obţinem că funcţia $x \mapsto f(x, u_0)$ este o selecţie continuă a lui F. Aşadar, problema parametrizării este mai dificilă decât cea a existenţei selecţiilor continue.

Corolarul 3 *Fie X un spaţiu metric şi $F : X \rightsquigarrow \mathbf{R}^n$ o multifuncţie continuă cu valori nevide convexe şi compacte. Atunci există o funcţie continuă $f : X \times B \to \mathbf{R}^n$ astfel încât pentru orice $x \in X$ avem $F(x) = f(x, B)$, unde B este sfera unitate închisă de centru 0 şi rază 1 din X.*

Demonstraţie. Notăm

$$p(x) = \max\{1, \inf_{y \in F(x)} \|y\|\}$$

şi definim funcţia $f : X \times B \to \mathbf{R}^n$ prin

$$f(x, u) = \pi(F(x), p(x)u)$$

unde $\pi(F(x), p(x)u)$ notează proiecţia elementului $p(x)u$ pe mulţimea convexă şi compactă $F(x)$. Este uşor de văzut că $F(x) = f(x, B)$ pentru $x \in X$. Mai rămâne de arătat că funcţia f definită mai sus este continuă. Pentru aceasta se utilizează Teorema 11 pentru a deduce că funcţia p este continuă şi apoi Teorema 5. $\square$

Revenind la selecţii, să observăm că existenţa selecţiilor continue este tipică multifuncţiilor inferior semicontinue. Există multifuncţii superior semicontinue cu valori convexe şi compacte care nu au selecţie continuă. De exemplu, multifuncţia $F : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$ definită prin $F(x) = \{-1\}$ pentru $x < 0$, $F(x) = [-1, 1]$ pentru $x = 0$ şi $F(x) = \{1\}$ pentru $x > 0$ nu are selecţie continuă.

Vom vedea în continuare că dacă multifuncţia $F : X \rightsquigarrow Y$ are o selecţie continuă într-o vecinătate a unui punct x_0, atunci ea este inferior semicontinuă în x_0.

Definiţia 6 Spunem că multifuncţia strictă $F : X \rightsquigarrow Y$ este local selecţionabilă în $x_0 \in X$ dacă pentru $y_0 \in F(x_0)$ există o vecinătate deschisă U a lui x_0 şi o funcţie continuă $f : U \to Y$ astfel încât $f(x_0) = y_0$ şi $f(x) \in F(x)$ pentru orice $x \in U$.

Propoziţia 7 *Dacă multifuncţia F este local selecţionabilă în x_0 atunci ea este inferior semicontinuă în x_0.*

Demonstraţie. Fie $y_0 \in F(x_0)$ şi V o vecinătate deschisă a lui y_0. Trebuie să arătăm că există o vecinătate W a lui x_0 astfel încât pentru $x \in W$ avem $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Fie $f : U \to Y$ o selecţie locală, continuă, cu $F(x_0) = y_0$ şi fie $W \subset U$ o vecinătate deschisă a lui x_0 astfel încât $f(x) \in V$ pentru $x \in W$. Avem $f(x) \in F(x) \cap V$ pentru orice $x \in W$ şi demonstraţia este încheiată. $\square$

De asemenea, folosind partiţia unităţii, în anumite condiţii existenţa locală a selecţiilor continue asigură existenţă unei selecţii continue.

Propoziţia 8 *Fie X un spaţiu metric, Y un spaţiu liniar topologic şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie cu valori nevide şi convexe. Presupunem că F este local selecţionabilă în orice punct $x_0 \in X$. Atunci F are o selecţie continuă.*

Demonstraţie. Fiecărui $x \in X$ îi asociem un element $y \in F(x)$ şi o selecţie continuă (local) $f : U_x \to Y$, U_x fiind o vecinătate deschisă a lui x. Familia $\{U_x;\ x \in X\}$ este o acoperire deschisă a lui X. Fie $\{V_i;\ i \in I\}$ o rafinare deschisă local finită a sa. Pentru fiecare $i \in I$ există $x(i) \in X$ astfel încât $V_i \subset U_{x(i)}$. Considerăm $\{p_i;\ i \in I\}$ o partiţie a unităţii subordonată familiei $\{V_i;\ i \in I\}$ şi definim

$$f(u) = \sum_{i \in I} p_i(u) f_{x(i)}(u).$$

Dacă i este astfel încât $p_i(u) > 0$ atunci $u \in V_i \subset U_{x(i)}$ şi deci $f_{x(i)}(u) \in F(u)$. Cum $F(u)$ este convexă deducem că $f(u) \in F(u)$ pentru orice $u \in X$. $\square$

Demonstrăm acum rezultatul central din teoria selecţiilor continue obţinut de Ernest Michael [65] [66] în 1956.

Teorema 12 (Michael) *Fie X un spaţiu metric, Y un spaţiu Banach şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie inferior semicontinuă cu valori nevide convexe şi închise. Atunci F are o selecţie continuă.*

Pentru demonstraţie avem nevoie de

Lema 1 *Fie X un spaţiu metric, Y un spaţiu normat şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie inferior semicontinuă cu valori nevide şi convexe. Atunci, pentru $r > 0$ există o funcţie continuă $f : X \to Y$ astfel încât $d(f(x), F(x)) < r$, pentru orice $x \in X$.*

Demonstraţie. Pentru fiecare $y \in Y$ fie

$$U_y = \{x \in X;\ d(y, F(x)) < r\}.$$

Mulţimile U_y sunt deschise deoarece

$$U_y = \{x \in X;\ F(x) \cap S(y, r) \neq \emptyset\}$$

iar F este inferior semicontinuă. Familia $\mathcal{U} = \{U_y;\ y \in Y\}$ este o acoperire deschisă a lui X. Fie $\mathcal{V} = \{V_i;\ i \in I\}$ o rafinare deschisă local finită a sa şi $\{p_i;\ i \in I\}$ o partiţie a unităţii subordonată ei. Deci pentru fiecare $i \in I$ există $y(i)$ astfel încât $V_i \subset U_{y(i)}$. Definim

$$f(x) = \sum_{i \in I} p_i(x) y(i).$$

Este clar că f este continuă. In plus, dacă $p_i(x) > 0$ atunci $x \in V_i \subset U_{y(i)}$ şi deci $d(y(i), F(x)) < r$. De aici, folosind convexitatea lui $F(x)$, deducem că $d(f(x), F(x)) < r$. $\square$

Demonstraţia Teoremei 12. Vom construi un şir de funcţii continue $f_i : X \to Y$ astfel încât pentru $x \in X$ să avem

(a) $\quad \|f_k(x) - f_{k-1}(x)\| < 2^{-k+2}, \;\; k \geq 2;$

(b) $\quad d(f_k(x), F(x)) < 2^{-k}, \;\; k \geq 1.$

In acest caz, (a) implică faptul că şirul de funcţii (f_n) este uniform Cauchy şi deci este convergent la o funcţie continuă $f : X \to Y$, iar din (b) rezultă imediat că $f(x) \in F(x)$ pentru orice $x \in X$. Existenţa lui f_1 satisfăcând (b) rezultă din Lema 1. Presupunem că am construit $f_1, f_2, \cdots, f_n$ şi construim f_{n+1} care să satisfacă (a) şi (b). Pentru aceasta, definim multifuncţia $F_{n+1} : X \rightsquigarrow Y$ prin

$$F_{n+1}(x) = \{y \in F(x);\; \|y - f_n(x)\| < 2^{-n}\}.$$

Din ipoteza inductivă, $F_{n+1}(x) \neq \emptyset$ pentru $x \in X$. Arătăm că F_{n+1} este inferior semicontinuă. Pentru aceasta, fie V deschisă în Y şi fie

$$U = \{x \in X;\; F_{n+1}(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Arătăm că U este deschisă. Fie $x_0 \in U$ şi $y_0 \in F_{n+1}(x_0) \cap V$. Luăm λ cu proprietatea

$$\|y_0 - f_n(x_0)\| < \lambda < 2^{-n}$$

şi considerăm mulţimea

$$Q = \{y \in Y;\; \|y - f_n(x_0)\| < \lambda\},$$

care este evident nevidă. Fie

$$\begin{aligned} U_1 &= \{x \in X;\; F(x) \cap V \cap Q \neq \emptyset\} \\ U_2 &= \{x \in X;\; \|f_n(x) - f_n(x_0)\| < 2^{-n} - \lambda\}. \end{aligned}$$

Mulţimea U_1 este deschisă pentru că F este inferior semicontinuă. Mulţimea U_2 este deschisă pentru că f_n este continuă. Este uşor de verificat faptul că $x_0 \in U_1 \cap U_2 \subset U$, deci multifuncţia F_{n+1} este inferior semicontinuă.

Aplicăm Lema 1 multifuncţiei F_{n+1} şi determinăm $f_{n+1} : X \to Y$ cu proprietatea

$$d(f_{n+1}(x), F_{n+1}(x)) < 2^{-n-1}, \quad \forall x \in X.$$

Obţinem

$$\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| < 2^{-n-1} + 2^{-n} = 2^{-n+1},$$

care implică (a) şi

$$d(f_{n+1}(x), F(x)) \leq d(f_{n+1}(x), F_{n+1}(x)) < 2^{-n-1},$$

care implică (b). Demonstraţia este încheiată. □

Corolarul 4 *Fie multifuncţia F ca în Teorema 12. Fie $A \subset X$ o mulţime închisă şi fie $\varphi : A \to Y$ o funcţie continuă cu $\varphi(x) \in F(x)$ pentru orice $x \in A$. Atunci φ poate fi extinsă la o selecţie continuă a lui F pe întreg spaţiul. In particular, dacă se fixează x_0 şi y_0 astfel încât $y_0 \in F(x_0)$, atunci există o selecţie continuă f a lui F cu $f(x_0) = y_0$.*

Demonstraţie. Se consideră multifuncţia

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{dacă } x \notin A \\ \{\varphi(x)\} & \text{dacă } x \in A \end{cases}$$

şi se aplică Teorema 12. Vezi Problema **??** din care rezultă că G este inferior semicontinuă. □

Să remarcăm faptul că Teorema 12 a lui Michael are loc şi dacă X este spaţiu compact. In demonstraţie se foloseşte faptul că orice acoperire local finită are o partiţie a unităţii subordonată ei. De asemenea, Y poate fi spaţiu local convex metrizabil.

Să prezentăm o aplicaţie simplă a Teoremei 12. Este un exerciţiu simplu faptul că dacă X şi Y sunt spaţii Hilbert, un operator surjectiv $T \in L(X, Y)$ are invers la dreapta un operator $S \in L(Y, X)$. Să schiţăm demonstrţia acestui fapt. Notăm cu $X_1 = \ker T$ şi cu $X_2 = X_1^{\perp}$. Definim operatorul S astfel: pentru $y \in Y$, luăm $x \in X$ cu proprietatea că $Tx = y$ şi $\|x\| \leq \gamma \|y\|$, unde γ este o constantă dată de Teorema aplicaţiilor deschise (vezi Capitolul 3). Elementul $x \in X$ se scrie în mod unic ca $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in X_1$ şi $x_2 \in X_2$. Definim $S(y) = x_2$. Se verifică uşor că operatorul S este bine definit liniar şi mărginit. Pentru ultima proprietate observăm că

$$\|S(y)\| = \|x_2\| \leq \|x\| \leq \gamma \|y\|.$$

O problemă naturală este aceea dacă proprietatea de mai sus se menţine în cazul când X şi Y sunt spaţii Banach. Răspunsul este negativ. In demonstraţia de mai sus s-a folosit în mod esenţial faptul că un subspaţiu liniar închis are un complement. Precizăm că un subspaţiu liniar închis X_1 al lui X are complement dacă există un subspaţiu liniar închis X_2 astfel încât

$$X = X_1 \oplus X_2.$$

Problema **??** arată că această proprietate este necesară pentru ca un operator liniar continuu şi surjectiv să aibă invers la dreapta un operator liniar şi continuu. Ori, Joram Lindenstrauss şi Lior Tzafriri [61] au demonstrat în 1971 că un spaţiu Banach care are proprietatea că orice subspaţiu închis are un complement (subspaţiu închis), este izomorf cu un spaţiu Hilbert. Exemple de subspaţii închise care nu au complement au fost date mult mai înainte, începând cu Ralph S. Phillips [73] care a arătat în 1940 că c_0 nu are complement în l_∞. Totuşi, Teorema 12 arată că

Un operator liniar continuu şi surjectiv în spaţii Banach are invers la dreapta o funcţie continuă.

Se pierde eventual liniaritatea. Intr-adevăr, fie $T \in L(X, Y)$ un operator surjectiv şi fie multifuncţia $F : Y \rightsquigarrow X$, $F(y) = T^{-1}y$. Problema **??** arată că multifuncţia F este inferior semicontinuă. Este un exerciţiu simplu faptul că celelalte ipoteze din Teorema 12 sunt verificate. Selecţia ce rezultă este funcţia căutată. Problema **??** pune în evidenţă existenţa unui invers la dreapta cu proprietăţi suplimentare. Vezi de asemenea Problema **??** pentru o aplicaţie în teoria incluziunilor diferenţiale.

După cum am văzut, există multifuncţii superior semicontinue cu valori compacte şi convexe care nu au selecţii continue. Pentru multifuncţii superior semicontinue se pot obţine rezultate de existenţă a selecţiilor aproximative. Rezultate semnificative în această direcţie au fost obţinute de Arigo Cellina în anii 1970. Vezi, de exemplu, [29].

Teorema 13 *Fie X spaţiu metric, Y spaţiu Banach şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie superior semicontinuă cu valori nevide şi convexe. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $f_\varepsilon : X \to Y$ local lipschitziană cu proprietaţile*

(i) $f_\varepsilon(X) \subset \mathrm{conv}F(X)$

(ii) $\mathrm{Graf}(f_\varepsilon) \subset \mathrm{Graf}(F) + S(0, \varepsilon)$.

Demonstraţie. Este suficient să presupunem că multifuncţia F este $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuă. Prin urmare, pentru fiecare $x \in X$ există $\delta(x) > 0$ astfel încât

$$F(S(x, \delta(x))) \subset F(x) + S(0, \varepsilon/2).$$

Putem lua $\delta(x)$ cu proprietatea $\delta(x) < \varepsilon/2$. Familia

$$\mathcal{S} = \{S(x, \delta(x)/4);\ x \in X\}$$

este o acoperire deschisă a spaţiului X. Fie $\mathcal{U} = \{U_i;\ i \in I\}$ o rafinare local finită a sa şi $\{p_i;\ i \in I\}$ o partiţie local lipschitziană a unităţii subordonate ei. Pentru fiecare $i \in I$ luăm $z_i \in F(U_i)$, apoi definim

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I} p_i(x) z_i.$$

Să arătăm că f_ε îndeplineşte condiţiile cerute. Este clar că f_ε este bine definită, local lipschitziană şi ia valori în conv$F(X)$. Deoarece $\mathcal{U}$ este o rafinare a lui $\mathcal{S}$, pentru fiecare $i \in I$ există $x_i \in X$ astfel încât

$$U_i \subset S(x_i, \delta(x_i)/4).$$

Fie $x \in X$ şi fie $I(x)$ acei indici i pentru care $p_i(x) > 0$. Deducem că $x \in U_i$ şi deci $x \in S(x_i, \delta(x_i)/4)$ pentru $i \in I(x)$. Fie $\delta(x_j) = \max\{\delta(x_i);\ i \in I(x)\}$. Notăm cu ρ metrica pe X şi observăm că

$$\rho(x_i, x_j) \le \rho(x_i, x) + \rho(x_j, x) \le \frac{\delta(x_i)}{4} + \frac{\delta(x_j)}{4} \le \frac{\delta(x_j)}{2}$$

pentru $i \in I(x)$. Prin urmare,

$$U_i \subset S(x_j, \delta(x_j))$$

şi deci

$$z_i \in F(S(x_j, \delta(x_j)) \subset F(x_j) + S(0, \varepsilon/2).$$

Având în vedere că mulţimea $F(x_j) + S(0, \varepsilon/2)$ este convexă, rezultă că

$$f_\varepsilon(x) \in F(x_j) + S(0, \varepsilon/2).$$

In consecinţă, există $y_j \in F(x_j)$ astfel încât $\|f_\varepsilon(x) - y_j\| < \varepsilon/2$. Obţinem astfel

$$\overline{\rho}((x, f_\varepsilon(x)), (x_j, y_j)) \le \rho(x, x_j) + \rho(f_\varepsilon(x), y_j) \le \varepsilon,$$

unde $\overline{\rho}$ notează metrica pe spţiul produs $X \times Y$. Ca atare,

$$(x, f_\varepsilon(x)) \in \mathrm{Graf}(F) + S(0, \varepsilon),$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Acest rezultat împreună cu Teorema de punct fix a lui Schauder ne conduce la o demonstraţie a Teoremei de punct fix a lui Kakutani în cadrul spaţiilor Banach. Vezi Capitolul 4.

Teorema 14 *Fie K o mulţime convexă şi compactă într-un spaţiu Banach X şi $F : K \rightsquigarrow K$ o multifuncţie superior semicontinuă cu valori nevide convexe şi compacte. Atunci există $x_0 \in K$ astfel încât $x_0 \in F(x_0)$.*

Demonstraţie. Fie (f_n) un şir de funcţii continue, $f_n : K \to X$, astfel încât

$$\mathrm{Graf}(f_n) \subset \mathrm{Graf}(F) + S(0, \varepsilon_n)$$

şi $f_n(K) \subset F(K) \subset K$, dat de Teorema 13, unde $\varepsilon_n \to 0$. Aplicând Teorema de punct fix a lui Schauder deducem că există $x_n \in K$ astfel încât $f_n(x_n) = x_n$, pentru orice $n = 1, 2, \cdots$. Şirul (x_n) are un subşir (pe care-l vom nota tot cu (x_n)) convergent la $x_0 \in K$. Vom arăta că acesta este punctul fix căutat. Intr-adevăr, există $(p_n, q_n) \in \mathrm{Graf}(F)$ astfel încât

$$(x_n, f_n(x_n)) \in (p_n, q_n) + S(0, \varepsilon_n),$$

deci

$$\|x_n - p_n\| + \|x_n - q_n\| \leq \varepsilon_n.$$

Deducem că $p_n \to x_0$, $q_n \to x_0$ şi deci $x_0 \in F(x_0)$. $\square$

Am văzut în Capitolul 1 că o funcţie continuă se poate aproxima uniform prin funcţii local lipschitziene. Stabilim acum un rezultat de aceeaşi natură pentru multifuncţii. Ideea aproximării multifuncţiilor superior semicontinue în sensul prezentat mai jos aparţine, în cazul finit dimensional, lui Stanisław Zaremba [100].

Teorema 15 *Fie X şi Y spaţii Banach, $D \subset X$ şi $F : D \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie cu valori nevide convexe şi închise. Atunci există $F_n : D \rightsquigarrow Y$, $n \geq 1$, cu următoarele proprietăţi*

(*a*) $F(x) \subset F_{n+1}(x) \subset F_n(x) \subset \overline{\mathrm{conv}} F(D \cap S(x, 3\varepsilon_n))$ *pentru orice* $x \in D$, *unde* $\varepsilon_n = 3^{-n}$;

(*b*) *Dacă F este local mărginită atunci F_n este local lipschitziană pentru n suficient de mare;*

(*c*) *Dacă F este superior semicontinuă atunci, pentru fiecare $x \in D$,*

$$\delta(F_n(x), F(x)) \to 0$$

pentru $n \to \infty$.

Precizăm că $\delta(A, B)$ este distanţa Hausdorff–Pompeiu definită în (5).

Demonstraţie. Fie $\mathcal{U} = \{U_i;\ i \in I\}$ o rafinare local finită a acoperirii deschise a lui D,

$$\mathcal{S} = \{S(x, \varepsilon_n) \cap D;\ x \in D\},$$

şi fie $\{p_i;\ i \in I\}$ o partiţie local lipschitziană a unităţii subordonată ei. Pentru fiecare $i \in I$, fie $x_i \in D$ astfel încât $U_i \subset S(x_i, \varepsilon_n)$. Punem

$$F_n(x) = \sum_{i \in I} p_i(x) C_i,$$

unde

$$C_i = \overline{\text{conv}} F(S(x_i, 2\varepsilon_n) \cap D).$$

Să demonstrăm (a). Dacă $p_i(x) > 0$ atunci $x \in U_i \subset S(x_i, \varepsilon_n)$ şi deci

$$S(x_i, 2\varepsilon_n) \subset S(x, 3\varepsilon_n).$$

De aici rezultă uşor că

$$F_n(x) \subset \overline{\text{conv}} F(S(x, 3\varepsilon_n) \cap D).$$

In plus avem

$$F(x) \subset F_n(x)$$

pentru orice $n \geq 1$. Pentru a dovedi acest fapt, luăm i astfel încât $p_i(x) > 0$, deducem $x \in S(x_i, 2\varepsilon_n)$ şi $F(x) \subset C_i$. Cum $F(x)$ este convexă, rezultă $F(x) \subset F_n(x)$. In sfârşit, să dovedim că

$$F_{n+1}(x) \subset F_n(x).$$

Fie $\{V_j;\ i \in J\}$, $\{q_i;\ j \in J\}$, $\{y_j;\ j \in J\}$ şi $\{B_j;\ j \in J\}$ obţinuţi în acelaşi mod ca $\{U_i;\ i \in I\}$, $\{p_i;\ i \in I\}$, $\{x_i;\ i \in I\}$ şi respectiv $\{C_i;\ i \in I\}$ în cazul în care ε_n se înlocuieşte cu ε_{n+1}. Fie, de asemenea,

$$F_{n+1}(x) = \sum_{j \in J} q_j(x) B_j.$$

Avem deci

$$B_j = \overline{\text{conv}} F(S(y_j, 2\varepsilon_{n+1}) \cap D).$$

Arătăm mai întâi că dacă i şi j sunt astfel încât $p_i(x) > 0$ şi $q_j(x) > 0$, atunci $B_j \subset C_i$. Intr-adevăr, $x \in U_i$, $x \in V_j$, deci $x \in S(x_i, \varepsilon_n)$ şi $x \in S(y_j, \varepsilon_{n+1})$. Obţinem astfel

$$\|x_i - y_j\| < \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1},$$

deci $S(y_j, 2\varepsilon_{n+1}) \subset S(x_i, 2\varepsilon_n)$, ceea ce conduce la $B_j \subset C_i$. Prin urmare $B_j \subset F_n(x)$ pentru orice j pentru care $q_j(x) > 0$ şi deci $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$.

Să demonstrăm acum (b). Fie $x_0 \in D$, fie $\delta > 0$ şi $M > 0$ astfel încât $\|y\| \leq M$ pentru $z \in B(x_0, \delta) \cap D$ şi $y \in F(z)$. Fie, în plus, $\mu < \delta/2$ astfel încât p_i sunt lipschitziene pe $B(x_0, \mu)$. Deoarece $\mathcal{U}$ este local finită, există indicii $i_1, \cdots, i_p$ astfel încât

$$U_i \cap S(x_0, \mu) \neq \emptyset$$

pentru $i \in \{i_1, \cdots, i_p\}$ iar dacă $i \notin \{i_1, \cdots, i_p\}$ avem $p_i(x) = 0$ pentru $x \in S(x_0, \mu)$. Să arătăm că dacă n este astfel încât $\varepsilon_n < \delta/2$, $i \in \{i_1, \cdots, i_p\}$ şi $y \in C_i$, avem $\|y\| \leq M$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că dacă $z \in S(x_i, 2\varepsilon_n) \cap D$ şi $y \in F(z)$ atunci $\|y\| \leq M$. Este suficient să arătăm că $z \in B(x_0, \delta)$. In acest scop, fie $u_i \in U_i \cap S(x_0, \mu)$. Avem $\|u_i - x_0\| < \delta/2$ şi deoarece $U_i \subset S(x_0, \varepsilon_n)$, deducem

$$\|x_i - x_0\| < \varepsilon_n + \delta/2.$$

In sfârşit,

$$\|z - x_0\| \leq \|z - x_i\| + \|x_i - x_0\| \leq 2\varepsilon_n + \varepsilon_n + \delta/2 < \delta.$$

Obţinem astfel că, dacă $x, y \in B(x_0, \mu)$,

$$\left\| \sum_{i \in I} p_i(x) c_i - \sum_{i \in I} p_i(y) c_i \right\| \leq ML\|x - y\|$$

pentru orice $c_i \in C_i$, unde L este o constantă Lipschitz pentru p_{i_k}, $k \in \{1, \cdots, p\}$, pe $B(x_0, \mu)$. Acest fapt spune că

$$F_n(x) \subset F_n(y) + ML\|x - y\| B(0, 1)$$

pentru $x, y \in B(x_0, \mu)$, ceea ce încheie demonstraţia punctului (b).

Să demonstrăm (c). Datorită faptului că $F(x) \subset F_n(x)$, rămâne să arătăm că pentru fiecare $x \in D$, avem

$$\sup_{h \in F_n(x)} d(h, F(x)) \to 0$$

pentru $n \to \infty$. Deoarece F este superior semicontinuă, pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$F(S(x, \delta)) \subset F(x) + S(0, \varepsilon),$$

deci, pentru n suficient de mare încât $3\varepsilon_n < \delta$, avem

$$F_n(x) \subset \overline{\text{conv}} F(S(x, 3\varepsilon_n) \cap D) \subset F(x) + S(0, \varepsilon).$$

Obţinem astfel

$$\sup_{h \in F_n(x)} d(h, F(x)) \leq \varepsilon,$$

şi demonstraţia este încheiată. $\square$

Observaţia 1 In demonstraţia punctului (c) am dedus că pentru fiecare $x \in D$ şi $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon, x) \in \mathbf{N}$ astfel încât, pentru $n \geq n(\varepsilon, x)$,

$$F_n(x) \subset F(x) + S(0, \varepsilon).$$

Acest fapt împreună cu (a) implică

$$F(x) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n(x).$$

De asemenea, este clar că fiecare F_n are o selecţie continuă.

Prezentăm acum un rezultat de prelungire de tipul Teoremei lui Tietze de la funcţii.

Teorema 16 *Fie X şi Y spaţii normate, $A \subset X$ o mulţime închisă şi nevidă şi $F : A \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuă cu valori nevide închise mărginite şi convexe. Atunci există o extensie $G : X \rightsquigarrow Y$, $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuă cu valori nevide închise mărginite şi convexe şi care, în plus, satisface*

$$G(X) \subset \overline{\text{conv}}(F(A)).$$

Demonstraţie. Deoarece mulţimea A este închisă, pentru fiecare $x \in X \setminus A$ există $\varepsilon(x) > 0$ astfel încât $S(x, \varepsilon(x)) \cap A = \emptyset$. Familia

$$\mathcal{S} = \{S(x, \varepsilon(x)/8);\ x \in X \setminus A\}$$

este o acoperire deschisă a mulţimii $X \setminus A$. Fie $\mathcal{U} = \{U_i;\ i \in I\}$ o rafinare local finită şi $\{p_i;\ i \in I\}$ o partiţie local lipschitziană a unităţii subordonată ei. Construim

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & \text{pentru } x \in A \\ \sum_{i \in I} p_i(x) F(x_i) & \text{pentru } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

unde $x_i \in A$ este astfel încât

$$d(x_i, U_i) < 2 \inf\{d(x, A);\ x \in U_i\}. \tag{15}$$

Să remarcăm faptul că pentru fiecare $i \in I$ există $x_i \in A$ cu proprietatea (15). Pentru aceasta, observăm mai întâi că

$$\inf\{d(x, A);\ x \in U_i\} > 0.$$

Intr-adevăr, deoarece $\mathcal{U}$ este o rafinare a lui $\mathcal{S}$, pentru fiecare $i \in I$ există $z_i \in X \setminus A$ astfel încât

$$U_i \subset S(z_i, \varepsilon(z_i)/8) \subset S(z_i, \varepsilon(z_i)) \subset X \setminus A.$$

Dacă $x \in U_i$ şi $y \in A$, din prima incluziune de mai sus rezultă

$$\|x - z_i\| < \varepsilon(z_i)/8,$$

iar din ultima incluziune rezultă

$$\|y - z_i\| \geq \varepsilon(z_i).$$

Obţinem astfel $\|x - y\| > (7/8)\varepsilon(z_i)$ pentru orice $x \in U_i$ şi $y \in A$. Aşadar

$$\inf\{d(x, A);\ x \in U_i\} \geq \tfrac{7}{8}\varepsilon(z_i) > 0.$$

In particular,

$$\operatorname{diam}(U_i) \leq \inf\{d(x, A);\ x \in U_i\}. \tag{16}$$

Deoarece

$$2\inf\{d(x, A);\ x \in U_i\} > \inf\{d(x, A);\ x \in U_i\},$$

există $x' \in U_i$ astfel încât

$$d(x', A) < 2\inf\{d(x, A);\ x \in U_i\}$$

şi deci există $x_i \in A$ astfel încât

$$\|x' - x_i\| < 2\inf\{d(x, A);\ x \in U_i\}.$$

De aici rezultă (15).

Să arătăm că multifuncţia F_1 construită mai sus este $\varepsilon-\delta$ superior semicontinuă. Fie $x_0 \in X \setminus A$ şi V o vecinătate deschisă a lui x_0 astfel încât $V \cap A = \emptyset$. Există un număr finit de elemente din $\mathcal{U}$, U_{i_k}, $k = 1, \cdots, q$, astfel încât

$$U_{i_k} \cap V \neq \emptyset.$$

Deoarece $\operatorname{supp} p_i \subset U_i$, rezultă că pentru $x \in V$ şi $i \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_q\}$ avem $p_i(x) = 0$. Deci pentru $x \in V$,

$$F_1(x) = \sum_{k=1}^{q} p_{i_k}(x) F(x_{i_k}).$$

Este clar că F_1 este superior semicontinuă în x_0. Considerăm acum cazul $x_0 \in \mathrm{Fr}(A)$. Fie $\varepsilon > 0$ şi $\delta_1 > 0$ astfel încât

$$F(x) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon),$$

pentru orice $x \in A$ cu $\|x - x_0\| < \delta_1$. Vom arăta că există $\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \delta_1$, astfel încât, dacă $x \notin A$ şi $\|x - x_0\| < \delta_2$, avem

$$F_1(x) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon).$$

Pentru aceasta, observăm că dacă $p_i(x) > 0$ atunci $x \in U_i$ şi, combinând (15) şi (16), obţinem

$$\|x - x_0\| < 3d(x, A).$$

Deoarece $x_0 \in A$, $d(x, A) \leq \|x - x_0\|$ şi deci

$$\|x_i - x_0\| \leq 4\|x - x_0\|.$$

Prin urmare, considerând $\delta_2 = \delta_1/4$ deducem că pentru $x \in X \setminus A$ cu $\|x - x_0\| < \delta_2$ şi pentru acei indici i pentru care $p_i(x) > 0$,

$$F(x_i) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon).$$

De aici, şi din convexitatea lui $F(x_0)$, obţinem

$$F_1(x) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon) = F_1(x_0) + S(0, \varepsilon).$$

Am demonstrat aşadar că multifuncţia F_1 este $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuă pe X. Ea are valori convexe şi mărginite dar poate să nu aibă valori închise (pentru că suma a două mulţimi închise poate să nu fie închisă). Pentru a încheia demonstraţia luăm $G = \overline{F_1}$ şi aplicăm Propoziţia 4. □

References

[1] Aubin J.-P., Cellina A., *Differential Inclusions,* Springer-Verlag, 1984.

[2] Aubin J.-P., Frankowska H., *Set-Valued Analysis,* Birkhäuser, 1990.

[3] Arzelà C., Funzioni di linee, Atti della R. Accad. dei Lincei Rendiconti della Cl.Si. Fis. mat. Nat., (4) 5, 1889, 342-348

[4] Ascoli G., Le curve limite di una varieta data di curve, Atti della R. Accad. dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 18, 1882-1883, 521-586.

[5] Baire L. R., Sur les functions de variable réelles, Ann. Mat. Pura Appl., (3) 3, 1899, 1-222.

[6] Banach S., Sur les opéerations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales, Fund. Math., 3, 1922, 133-181.

[7] Banach S., Sur les functionelles linéaires, Studia Math., 1, 1929, 211-216 şi 223-239.

[8] Banach S., Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Math., 3, 1931, 174-179.

[9] Banach S., *Théorie des Opérations linéaires*, Monografje matematyczne, Warsaw, 1932.

[10] Banach S, Steinhaus H., Sur le principe de la condensation de singularités, Fund. Math., 9, 1927, 50-61.

[11] Barbu V., *Semigrupuri de Contracţii Neliniare în Spaţii Banach*, Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[12] Barbu V., Metode Matematice în Optimizarea Sistemelor Diferenţiale, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[13] Bebernes J. W., Schuur J.D., The Ważewski topological method for contingent equations, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 87, 1970, 271-279.

[14] Begle E. G., A fixed point theorem, Ann. of Math., (2) 51, 1950, 544-550.

[15] Bielecki A., Une remarque sur la méthode de Banach- Caccioppoli-Tikhonov dans la théorie des équations differentielles ordinaires, Bull. Acad. Polon Sci. Cl. III, 4, 1956, 261-264.

[16] Birkhoff G. D., Proof of Poincaré's geometric theorem, Trans. Amer. Math. Soc., 14, 1913, 14-22.

[17] Birkhoff G. D., Kellogg O. D., Invariant points in functin space, Trans. Amer. Math. Soc., 23, 1922, 96-115.

[18] Blair C. E., The Baire category theorem implies the principle of dependent choices, Bull. Acad. Polon. Sci., 25, 1977, 933-934.

[19] Bohnenblust H., Karlin S., On a theorem of Ville, In: Contributions to the theory of games, Kuhn and Tucker Eds., 155-160, University Press, Princeton, 1950.

[20] Borsuk K., Sur les rétractes, Fund. Math., 17, 1931, 152-170.

[21] Brézis H., Browder F., A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis, Adv. in Mathematics, 21, 1976, 355-364.

[22] Brown R.F., Elementary cosequences of the noncontractibility of the circle, Amer. Math. Monthly, 81, 1974, 247-252.

[23] Browder F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177, 1968, 283-301.

[24] Brouwer L.E.J., Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 71, 1912, 97-115.

[25] Caccioppoli R., Una teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale, Ren. Accad. Naz Lincei, 11, 1930, 794-799.

[26] Cazenave T., Haraux A., *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[27] Cârjă O., Ursescu C., The characteristics method for a first order partial differential equation, An. Şti. Univ."Al.I.Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat., 39, 1993, 367 - 396.

[28] Cârjă O., Vrabie I. I., Some new viability results for semilinear differential inclusions, NoDEA, 4, 1997, 401-424.

[29] Cellina A., Approximation of set-valued functions and fixed points theorems, Ann. Mat. Pura Appl., 82, 1969, 17-24.

[30] Costinescu O., *Elemente de topologie generală*, Editura tehnică, Bucureşti, 1969.

[31] Deimling K., *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, 1992.

[32] Dieudonné J.A., Une généralisation des espaces compactes, J. Math. Pures Appl., 23, 1944, 65-76.

[33] Dugundji J., An extension of Tietze's theorem, Pacific J. Math., 1, 1951, 353-367.

[34] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[35] Ekeland I., On the variational principle, J. Math. Anal. Appl., 74, 1974, 324-353.

[36] Feferman S., Independence of the axiom of choice from the axiom of independence choices, J. Sym. Logic, 29, 1967, 226.

[37] Gheorghiu N., *Introducere în Analiza Funcţională,* Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[38] Glicksberg I.L., A further generalization of the Kakutani fixed theorem, with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. Math. Soc., 3, 1952, 170-174.

[39] Goursat E., Sur la théorie des fonctions implicites, Bull. Soc. Math. France, 31, 1903, 184-192.

[40] Graves L.M., Some mapping theorems, Duke Math. J., 17, 1950, 111-114.

[41] Gröger K., A simple proof of the Brouwer fixed point theorem, Math. Nachr., 102, 1981, 293-295.

[42] Hahn H., Über Folgen linearen Operationen, Monatsh. math. Phys., 32, 1922, 3-88.

[43] Halmos P., Vaughan H., The marriage problem, 72, 1950, 214-215.

[44] Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Verlag von Veit, Leipzig, 1914.

[45] Hill L.S., Properties of certain aggregate functions, Amer. J. Math., 49, 1927, 419-432.

[46] Hildebrandt T. H., On uniform limitedness of sets of functional operators, Bull. Amer. Math. Soc., 29, 1923, 309-315.

[47] Holmes R., *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer, 1975.

[48] Kakutani S., A generalization of Brouwer's fixed-point theorem, Duke Math. J., 8, 1941, 457-459.

[49] Kantorovici L.V., Akilov G.P., *Analiză Funcţională,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[50] Karamardian S., Generalized complementarity problem, J. Optim. Theory Appl., 8, 1971, 161-168.

[51] Kelley J.L., The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, Fund. Math., 37, 1950, 75-76.

[52] Klein E., Thompson A.C., *Theory of Correspondences*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[53] Kuratowski K., Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés, Fund. Math., 18, 1932, 148-180.

[54] Kuratowski K., *Topology*, Academic Press, New York, 1966.

[55] Ky Fan, Fixed-point and minimax theorems in locally convex linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., 38, 1952, 121-126.

[56] Ky Fan, A minimax inequality and applications, in: Inequalities III, 103-113, Academic Press, New York, 1972.

[57] Ky Fan, Glicksberg I., Some geometric properties of the spheres in a normed linear space, Duke Math. J., 25, 1958, 553-568.

[58] Leray J, Schauder J., Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 51, 1934, 45-78.

[59] Lichtenstein L., Über einige Existenzprobleme der Variationsrehnung. Methode der unendlichvielen Variabeln, J. Reine Angew. Math., 145, 1915, 24-85.

[60] Lifshits E.A., Ideally convex sets, Funct. Anal. Appl., 4, 1970, 330-331, tradus din Funkts. Anal. Prilozh., 4, 1970, 76-77

[61] Lindenstrauss J, Tzafriri L, On the complemented subspaces problem, Israel J. Math., 9, 1971, 263-269.

[62] Lyusternik L.A., Conditional extrema of functionals, Mat. Sb., 41, 1934, 390-401.

[63] Marchaud A., Sur les champs continus de demi-cones convex et leur integrales, Comp. math., 3, 1936, 89-127.

[64] Megginson R. E., *An Introduction to Banach Spaces Theory*, Springer, 1998.

[65] Michael E., Continuous selections I, Ann. Math., 63, 1956, 361-382.

[66] Michael E., Continuous selections II, Ann. Math., 64, 1956, 562-580.

[67] Miranda C., Un'osservazione su un teorema di Brouwer, Boll. Un. Mat. Ital., (2) 3, 1940, 527.

[68] Moore R. L., Concerning upper semicontinuous collections of continua, Trans. Amer. Math. Soc., 27, 1925, 416-428.

[69] Moore E. H., Smith H. L., A general theory of limits, Amer. J.Math., 44, 1922, 102-121.

[70] Nadler S. B. Jr., Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math., 30, 1969, 475-488.

[71] Nagumo M., Über die Lage der Integralkurven gewönlicher Differential-gleichungen, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 24, 1942, 551-559.

[72] Ostrowski A.M., The round-off stability of iterations, Z. Angew. Math. Mech., 47, 1967, 77-81.

[73] Phillips R. S., On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 48, 1940, 516-541.

[74] Picard E., Mémoire sur la théorie des équations aux dérivés partielles et la méthode des approximations successives, J. Math. Pures Appl. 6, 1890, 145-210.

[75] Picone M., *Lezioni di analizi infinitesimale*, vol. 1, Circolo Matematico di Catania, Catania, Italy, 1923.

[76] Popa E., *Culegere de Probleme de Analiză Funcţională,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[77] Precupanu A., *Analiză Matematică. Funcţii Reale,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

[78] Precupanu A., *Bazele Analizei Matematice,* Editura Universităţii "Al.I.Cuza" Iaşi, Iaşi, 1993.

[79] Precupanu T., *Spaţii Liniare Topologice şi Elemente de Analiză Convexă,* Editura Academiei, Bucureşti, 1992.

[80] Robinson S., Regularity and stability for convex multivalued functions, Math. Oper. Res., 1, 1976, 130-143.

[81] Rudin M.E., A new proof that metric spaces are paracompact, Proc. Am. Math. Soc., 20, 1969, 603.

[82] Saint Raymond J., Multivalued contractions, Set-Valued Anal., 2, 1994, 559-571.

[83] Schauder J., Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math.Z., 26, 1927, 63-98.

[84] Schauder J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math., 2, 1930, 171-180.

[85] Schauder J., Über lineare, vollstetige funktionaloperationen, Studia Mat., 2, 1930, 183-196.

[86] Stampacchia G., Formes bilinéaires coercitives sur les ensemble convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964, 4413-4416.

[87] Steinlein H., On two results of J. Dugundji about extensions of maps and retractions, Proc. Amer. Math. Soc., 77, 1979, 289-290.

[88] Stone A.H., Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 1948, 977-982.

[89] Tychonoff A.N., Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Anal., 102, 1930, 544-561.

[90] Tychonoff A. N., Über einen Funktionenräum, Math. Ann., 111, 1935, 767-776.

[91] Tychonoff A. N., Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111, 1935,

[92] Ursescu C., Multifunctions with closed convex graph, Czech. Math. J., 25, 1975, 438-441.

[93] Urysohn P., Über die Mächtigkeit der Zusammenhängenden Mengen, Math. Ann., 94, 1925, 262-295.

[94] Vrabie I. I., *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Second Edition, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **75**, Longman, 1995.

[95] Vrabie I. I., *Semigrupuri de Operatori Liniari şi Aplicaţii*, Editura Universităţii "Al.I.Cuza", Iaşi, 2001.

[96] Von Neumann J., Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Math. Ann., 100, 1928.

[97] Von Neumann J., Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Browerschen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, Vienna 8, 1937, 73-83.

[98] T. Ważewski, Sur une condition équivalent à l'équation au contingent, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. e Phys.*, **9** (1961), pp. 865-867.

[99] Zabreĭko P.P., A theorem for semiadditive functionals, Functional Anal. Appl., 3, 1969, 70-72.

[100] Zaremba S.K., Sur les equations au paratingent, Bull. Sci. Math., 60, 1936, 139-160.

[101] Zălinescu C., *Programare Matematică în Spaţii Infinit Dimensionale*, Editura Academiei, Bucureşti, 1999.

[102] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications; Part I: Fixed-Point Theorems, Part II: Monotone Operators, Part III: Variational Methods and Optimization, Parts IV/V: Applications to Mathematical Physics*, Springer, 1984.

Lectiile 9 si 10, Principiul aplicaţiilor deschise

Unul dintre cele mai profunde rezultate din teoria operatorilor liniari continui în spaţii Banach este Principiul aplicaţiilor deschise publicat de Juliusz Schauder [85] în 1930 şi de Banach în faimoasa sa carte *Théorie des opérations linéaires* apărută în 1931 şi tradusă în franceză [9] în 1932. Ca şi Principiul mărginirii uniforme obţinut de Theophil H. Hildebrandt [46] în 1923, Principiul aplicaţiilor deschise s-a dovedit deosebit de util într-o varietate largă de probleme. Să enunţăm acest rezultat.

Teorema 1 *Fie X şi Y spaţii Banach şi $T \in L(X, Y)$ un operator surjectiv. Atunci următoarele afirmaţii* (*echivalente între ele*) *au loc.*

(a) *T este aplicaţie deschisă;*

(b) *Există $\gamma > 0$ astfel încât, pentru fiecare $y \in Y$, există $x \in X$ cu $Tx = y$ şi $\|x\| \leq \gamma \|y\|$;*

(c) *Există $\delta > 0$ astfel încât $B(Tx, t) \subset T(B(x, \delta t))$ pentru orice $x \in X$ şi $t > 0$.*

(d) *Există $\alpha > 0$ astfel încât, pentru orice $(x, y) \in X \times Y$,*

$$d(x, T^{-1}(y)) \leq \alpha \|y - Tx\|.$$

Deşi afirmaţiile de la (c) şi (d) sunt interpretări imediate ale lui (b), le-am enunţat aici pentru că ele sunt esenţiale în înţelegerea a ceea ce urmează în acest capitol. Să precizăm că marginea inferioară a valorilor pentru constantele γ, δ şi α este $\|(A^*)^{-1}\|$, fapt uşor de arătat. Proprietatea enunţată la (c) afirmă că sfera centrată în Tx şi rază t este acoperită de imaginea prin T a unei sfere de rază δt. In literatura matematică, aceasta se numeşte proprietatea de *acoperire liniară* în (x, Tx) (dacă se verifică macar pentru t mic). Dacă inegalitatea de la (d) se verifică pentru $y = y_0$ şi x într-o vecinătate a lui x_0 cu $(x_0, y_0) \in$ Graf T, se spune că T are proprietatea de *regularitate metrică* în (x_0, y_0). Această terminologie a fost introdusă Jean-Paul Penot în anii 1980.

Un principiu de bază în analiza neliniară (netedă) este acela că o funcţie "satisface" local proprietăţile derivatei sale. Acest principiu, legat de Teorema aplicaţiilor deschise de mai sus, se regăseşte în două teoreme clasice ale analizei matematice: teorema spaţiului tangent demonstrată de Lazar A. Lyusternik [62] în 1934 şi teorema surjecţiei demonstrată de Lawrence M. Graves [40] în 1950, fiecare fiind legată de câte una dintre cele două interpretări ale Teoremei 1.

Astfel, teorema lui Lyusternik afirmă că varietatea liniară tangentă la mulţimea $f^{-1}(y_0)$ în punctul $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ este $\ker f'(x_0)$ unde $f : X \to Y$ este de clasă C^1 şi satisface condiţia de regularitate (sau condiţia Lyusternik)

$$\mathrm{Im} f'(x_0) = Y.$$

De fapt, demonstraţia lui Lysternik conduce la faptul că există $K > 0$ astfel încât

$$d(x, f^{-1}(y_0)) \leq K\|y_0 - f(x)\|$$

pentru orice $x \in x_0 + \ker f'(x_0)$ suficient de aproape de x_0 şi, cu o uşoară modificare a demonstraţiei, pentru orice $x \in X$ suficient de aproape de x_0.

Teorema lui Graves afirmă, într-o formă particulară, că dacă $f : X \to Y$ este de clasă C^1 în x_0 şi satisface condiţia de regularitate a lui Lyusternik $\mathrm{Im} f'(x_0) = Y$ atunci există $m > 0$ astfel încât, pentru $t > 0$ suficient de mic, imaginea prin f a unei sfere centrată în x_0 de rază t conţine sfera de rază mt centrată în $f(x_0)$. De fapt proprietatea are loc pentru x într-o vecinătate a unui punct x_0, deci are loc proprietatea de acoperire liniară. Abia la începutul anilor 1970, Alexander D. Ioffe şi Vladimir M. Tikhomirov au demonstrat că în condiţiile teoremei lui Graves are loc proprietatea de regularitate metrică. Vom reveni asupra acestor rezultate în Secţiunea 4 a acestui capitol.

In continuare ne vom ocupa de o extindere a teoremei aplicaţiilor deschise la multifuncţii cu grafic convex şi închis, stabilită în 1975 de Corneliu Ursescu [92] şi, independent, în 1976 de Stephen M. Robinson [80]. Acest rezultat a avut un impact major şi a determinat o direcţie de cercetare deosebit de prolifică.

Teorema 2 (Robinson -Ursescu) *Fie X şi Y spaţii Banach şi $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncţie convexă şi închisă. Fie $y_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{Im}F)$ şi $x_0 \in F^{-1}(y_0)$. Atunci*

(i) Există $\gamma > 0$ astfel încât

$$B(y_0, \gamma) \subset F(B(x_0, 1));$$

(ii) Există $\alpha > 0$ astfel încât, dacă $y \in B(y_0, \alpha)$, există $x \in F^{-1}(y)$ cu

$$\|x - x_0\| \leq \frac{1}{\alpha}\|y - y_0\|;$$

(iii) Există $\beta > 0$ astfel încât, dacă $y \in B(y_0, \beta)$, $u \in \mathrm{Dom}(F)$ şi $v \in F(u)$, există $x \in F^{-1}(y)$ cu

$$\|x - u\| \leq \frac{1}{\beta}(1 + \|u - x_0\|)\|y - v\|;$$

(iv) Există $\beta > 0$ (acelaşi de la (iii)) astfel încât, dacă $y \in B(y_0, \beta)$ şi $u \in \mathrm{Dom}(F)$,

$$d(u, F^{-1}(y)) \leq \frac{1}{\beta}(1 + \|u - x_0\|)d(y, F(u)).$$

Se vede uşor că (iii) este o proprietate de acoperire liniară iar (iv) de regularitate metrică. După cum se va vedea mai jos, se demonstrează întâi punctul (i), acesta fiind pasul cel mai dificil, apoi se demonstrează (iii). Este clar că (ii) este un caz particular al lui (iii) dacă se ia $u = x_0$ şi $v = y_0$. Avem deci:

Există două constante pozitive α şi β astfel încât pentru fiecare y cu $\|y - y_0\| \leq \alpha$ există $x \in F^{-1}(y)$ satisfăcând

$$\|x - x_0\| \leq \beta \|y - y_0\|.$$

Inainte de a demonstra această teoremă să facem câteva comentarii. In primul rând să observăm că o consecinţă imediată este

Corolarul 1 *In condiţiile Teoremei 2, pentru orice $V \in \mathcal{V}(x_0)$ avem $F(V) \in \mathcal{V}(y_0)$.*

Demonstraţie. Pentru $V \in \mathcal{V}(x_0)$ există $\delta > 0$ astfel încât $S(x_0, \delta) \subset V$. Considerând α dat de (ii) şi $\gamma > 0$ astfel încât $\gamma < \alpha$ şi $\beta\gamma < \alpha\delta$, rezultă imediat că $S(y_0, \gamma) \subset F(V)$. □

Să remarcăm faptul că în cazul unui operator liniar continuu şi surjectiv T, concluzia Corolarului 1 este echivalentă cu (c) şi deci cu (a). Prin urmare, Teorema 1 este un caz particular al Teoremei 2. Acest rezultat se poate generaliza în forma următoare.

Corolarul 2 *Fie X, Y, Z spaţii Banach, $T \in L(Z, Y)$ şi $S \in L(X, Y)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $T(Z) \subset S(X)$;

(ii) *Există $k > 0$ astfel încât $T(B(0, 1)) \subset S(B(0, k))$.*

Demonstraţie. Implicaţia $(ii) \Longrightarrow (i)$ este imediată. Pentru a demonstra reciproca, luăm multifuncţia $F = T^{-1}S$ şi aplicăm Teorema 2. □

Observaţia 1 Proprietăţile enunţate la (i) şi (ii) au caracterizări duale deosebit de utile în aplicaţii. Astfel, dacă X este reflexiv, $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ unde

(iii) $\|T^* y^*\| \leq k \|S^* y^*\| \quad \forall y^* \in Y^*$.

In general, (iii) este echivalent cu

(iv) $\{T(z); \|z\| \leq 1\} \subset \overline{\{Sx; \|x\| \leq k\|\}}$.

Dacă T este operatorul identic (deci $Z = Y$), atunci $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ fără condiţii suplimentare. Acest fapt exprimă că un operator $S \in L(X,Y)$, unde X şi Y sunt spaţii Banach, este surjectiv dacă şi numai dacă adjunctul său are invers mărginit pe imaginea sa. Demonstraţia acestor fapte o lăsăm ca exerciţiu.

Să observăm că afirmaţia (b) din Teorema 1 implică faptul că multifuncţia $F = T^{-1}$ este lipschitziană de constantă Lipschitz γ, adică,

$$F(x_1) \subset F(x_2) + \gamma\|x_1 - x_2\|B(0,1) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Rezultatul este adevărat şi pentru procese convexe.

Corolarul 3 *Fie X şi Y spaţii Banach şi $F : X \rightsquigarrow Y$ un proces convex închis şi surjectiv, adică $F(X) = Y$. Atunci multifuncţia F^{-1} este lipschitziană.*

Demonstraţie. Luăm în Teorema 2 $x_0 = y_0 = 0$. Prin urmare, există $\alpha, \beta > 0$ astfel încât, pentru orice $y \in Y$ cu $\|y\| \le \alpha$, există $x \in F^{-1}(y)$ astfel încât $\|x\| \le \beta\|y\|$. Deoarece Graf(F) este con, există $L > 0$ astfel încât, pentru orice $y \in Y$, există $x \in F^{-1}(y)$ cu $\|x\| \le L\|y\|$. Fixăm acum $y_1, y_2 \in Y$ şi luăm $x_1 \in F^{-1}(y_1)$ şi $t \in F^{-1}(y_2 - y_1)$ satisfăcând $\|t\| \le L\|y_1 - y_2\|$. Având în vedere că Graf(F) este con convex, deducem $x_2 = x_1 + t \in F^{-1}(y_2)$, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Pentru demonstraţia Teoremei 2 avem nevoie de câteva chestiuni preliminare.

Definiţia 1 Fie X un spaţiu liniar topologic. O submulţime nevidă a lui X se numeşte *ideal convexă* dacă pentru orice şir mărginit $(x_n) \subset A$ şi orice şir (λ_n) cu $\lambda_n \ge 0$ şi $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, seria $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ ori este convergentă la un element din A ori este divergentă.

Dacă X este spaţiu Banach, având în vedere că şirul (x_n) este mărginit, rezultă că seria $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ este chiar absolut convergentă. Deci în acest caz mulţimea A este ideal convexă dacă suma seriei este un element din A.

Următoarea lemă pune în evidenţă o proprietate remarcabilă a mulţimilor ideal convexe, rezultat obţinut de Evgenij A. Lifshits (Lifšic) în 1970 [60].

Lema 1 *Fie A o mulţime ideal convexă într-un spaţiu Banach X. Atunci*

$$\mathrm{int}A = \mathrm{int}(\overline{A}).$$

Demonstraţie. Arătăm că dacă $y \in \mathrm{int}(\overline{A})$ atunci $y \in \mathrm{int}A$. Este suficient să luăm $y = 0$, altfel lucrăm cu $A - y$ în loc de A. Presupunem deci că $0 \in \mathrm{int}(\overline{A})$. Există $\delta > 0$ astfel încât

$$B(0,\delta) \subset \overline{A} \cap B(0,\delta) \subset \overline{A \cap B(0,\delta)} \subset A \cap B(0,\delta) + B(0,\delta/2).$$

Am folosit aici următorul rezultat [79, p.14], [101]:

Pentru orice submulţime A a unui spaţiu liniar topologic,

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} (A + V),$$

unde $\mathcal{V}$ este un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii.

In consecinţă, pentru fiecare $t > 0$ avem

$$B(0,t\delta) \subset t(A \cap B(0,\delta)) + B(0,t\delta/2).$$

Fie $x \in B(0,\delta/2)$. Pentru $t = 1/2$, există $x_1 \in A \cap B(0,\delta)$ şi $y_1 \in B(0,\delta/4)$ astfel încât

$$x = \tfrac{1}{2}x_1 + y_1.$$

Continuând procedeul cu $t = 1/2^2, 1/2^3, \cdots, 1/2^n, \cdots$ obţinem şirurile $(x_n) \subset A \cap B(0,\delta)$, $(y_n) \subset B(0,\delta/2^{n+1})$ cu proprietatea

$$y_n = \frac{1}{2^{n+1}}x_{n+1} + y_{n+1}.$$

Avem

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}x_i\| = \|y_n\| \leq \frac{\delta}{2^{n+1}},$$

deci

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}x_i.$$

Deoarece A este ideal convexă, $x \in A$. Am arătat astfel că $B(0,\delta/2) \subset A$, ceea ce dovedeşte că $0 \in \mathrm{int}A$ şi astfel lema este demonstrată. □

Lema 2 *O mulţime convexă închisă şi absorbantă într-un spaţiu Banach este vecinătate a originii.*

Demonstraţie. Fie A o mulţime convexă închisă şi absorbantă în spaţiul Banach X. Mulţimea $B = A \cap (-A)$ este convexă închisă simetrică şi absorbantă. Deoarece B este absorbantă şi convexă avem

$$X = \bigcup_{n \geq 1} nB.$$

Folosind Teorema lui Baire [37, p.102] (vezi şi Propoziţia 3 (ii)), deducem că există n_0 astfel încât $\mathrm{int}(n_0 B) \neq \emptyset$, deci $\mathrm{int}B \neq \emptyset$. Vom arăta că mulţimea B este vecinătate a originii, deci şi A este vecinătate a originii. Pentru aceasta, fie $x \in \mathrm{int}B$. Obţinem $-x \in \mathrm{int}B$ şi, deoarece $\mathrm{int}B$ este mulţime convexă,

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in \mathrm{int}B,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Demostraţia Teoremei 2 Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $(x_0, y_0) = (0, 0)$, altfel considerăm multifuncţia a cărui grafic este $\mathrm{Graf}(F) - (x_0, y_0)$. Fie deci $0 \in \mathrm{int}(\mathrm{Im}(F))$ şi $0 \in F^{-1}(0)$. Considerăm mulţimea $A = F(B(0, 1))$ şi arătăm că este ideal convexă şi $0 \in \mathrm{int}\overline{A}$. Pentru aceasta, considerăm şirurile $(y_n) \subset A$ (mărginit) şi (λ_n) cu $\lambda_n \geq 0$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. Există $(x_n) \subset B(0, 1)$ astfel încât $y_n \in F(x_n)$. In plus, seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n$ sunt convergente. Deoarece $\mathrm{Graf}(F)$ este mulţime convexă, avem

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda_n y_n + \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n \right) y_{m+1} \in F \left(\sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n + \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n \right) x_{m+1} \right)$$

pentru orice $m \geq 1$. Trecând la limită cu $m \to \infty$ şi folosind faptul că $\mathrm{Graf}(F)$ este mulţime închisă, deducem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n \in F \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right).$$

Este uşor de văzut că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in B(0, 1),$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n \in A,$$

ceea ce arată că A este ideal convexă.

Demonstrăm acum că A este absorbantă. Considerăm $y \in Y$ şi observăm că există $\lambda > 0$ astfel încât $\lambda y \in \mathrm{Im}(F)$, deoarece $0 \in \mathrm{int}(\mathrm{Im}(F))$. Există deci $x \in X$ astfel încât $\lambda y \in F(x)$. Mai departe, există $\mu \in (0,1)$ astfel încât $\mu x \in B(0,1)$ şi, deoarece $\mathrm{Graf}(F)$ este convexă,

$$\mu\lambda y = \mu(\lambda y) + (1-\mu)0 \in F(\mu x + (1-\mu)0) = F(\mu x) \subset F(B(0,1)).$$

Aşadar, mulţimea $\overline{A}$ este convexă închisă şi absorbantă, deci este vecinătate a originii conform Lemei 2. Am demonstrat astfel că

$$0 \in \mathrm{int}\overline{F(B(0,1))}.$$

Aplicăm Lema 1 şi deducem că $0 \in \mathrm{int}F(B(0,1))$. Există deci $\gamma > 0$ astfel încât $B(0,\gamma) \subset F(B(0,1))$ şi deci are loc (i).

Să demonstrăm (iii). Notăm $\beta = \gamma/2$ unde γ este dat de (i) şi arătăm că acesta este β cerut de (iii). Fie deci $y \in B(y_0, \beta)$, $u \in \mathrm{Dom}(F)$ şi $v \in F(u)$. Fie de asemenea

$$\lambda = \frac{\|y-v\|}{\beta + \|y-v\|}.$$

Avem

$$\|y + \frac{\beta}{\|y-v\|}(y-v) - y_0\| \leq \gamma.$$

Din (i), există $t \in \mathrm{Dom}(F)$ cu proprietatea

$$y + \frac{\beta}{\|y-v\|}(y-v) \in F(t)$$

şi $\|t - x_0\| \leq 1$. Deoarece $\lambda\beta/\|y-v\| = 1-\lambda$, obţinem $\lambda y + (1-\lambda)(y-v) \in \lambda F(t)$ care, împreună cu $(1-\lambda)v \in (1-\lambda)F(u)$ şi cu faptul că multifuncţia F este convexă, implică $y \in F(\lambda t + (1-\lambda)u)$. Să arătăm că $x = \lambda t + (1-\lambda)u$ satisface inegalitatea cerută. Avem

$$\|x-u\| = \lambda\|t-u\| \leq \frac{\|y-v\|}{\beta}(\|t-x_0\| + \|u-x_0\|) \leq$$

$$\frac{\|y-v\|}{\beta}(1 + \|u-x_0\|),$$

ceea ce încheie demonstraţia punctului (iii).

In sfârşit să demonstrăm (iv). Pentru aceasta se modifică puţin demonstraţia punctului (iii). Dacă $d(u, F^{-1}(y)) = 0$, demonstraţia este terminată. Dacă nu, pentru $\varepsilon > 0$ considerăm $v \in F(u)$ astfel încât

$$\|v - y\| \leq d(y, F(u))(1+\varepsilon).$$

Mai departe se face raţionamentul de la (iii) şi se obţine în final

$$\|x-u\| \le \frac{\|y-v\|}{\beta}(1+\|u-x_0\|) \le \frac{d(y,F(u))(1+\varepsilon)}{\gamma}(1+\|u-x_0\|).$$

Deoarece $x \in F^{-1}(y)$ iar ε este arbitrar, demonstraţia se încheie. $\square$

In particular obţinem

Corolarul 4 *Fie multifuncţia F ca în Teorema 2. Atunci*
(i) Există constantele pozitive r, ρ şi ω astfel încât, dacă $\|u-x_0\| < \rho$, $\|y-y_0\| < r$ şi $v \in F(u)$, există $x \in \mathrm{Dom}(F)$ cu proprietăţile $y \in F(x)$ şi $\|x-u\| \le \omega\|y-v\|$;
(ii) Multifuncţia F^{-1} este inferior semicontinuă pe $\mathrm{int}(\mathrm{Im}(F))$.

O consecinţă remarcabilă a Teoremei 1 este Teorema graficului închis.

Corolarul 5 *Fie X şi Y spaţii Banach şi $T : X \to Y$ un operator liniar şi cu grafic închis. Atunci T este continuu.*

Avem mai general

Corolarul 6 *Fie X şi Y spaţii Banach şi $F : X \rightsquigarrow Y$ un proces convex închis cu $\mathrm{Dom}(F) = X$. Atunci F este multifuncţie lipschitziană.*

Demonstraţie. Se aplică Corolarul 3 procesului convex închis şi surjectiv F^{-1}. $\square$

Este clar că dacă F este operator liniar, condiţia Lipschitz se reduce la condiţia de mărginire şi deci Corolarul 5 rezultă din Corolarul 6.

1 Teorema lui Baire

Demonstraţia Teoremei 2 se bazează pe un rezultat fundamental din Analiza matematică şi anume Teorema lui Baire. Folosim acest prilej pentru a face câteva comentarii referitoare la acest rezultat. El este frecvent utilizat în forma următoare (vezi, de exemplu, [37, p.102], [101, p.11]).

Propoziţia 1 *Fie X un spaţiu metric complet şi (X_n) un şir de mulţimi închise din X. Dacă $X = \cup_{n\in\mathbf{N}} X_n$, există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $\mathrm{int}\, X_{n_0} \ne \emptyset$.*

Propoziţia 1 se poate deduce prin complementarietate din

Propoziţia 2 *Fie X un spaţiu metric complet şi (X_n) un şir de mulţimi deschise şi dense din X. Atunci $\cap_{n\in\mathbf{N}}X_n$ este densă în X.*

Este interesant de observat că Propoziţia 2 nu rezultă prin complementarietate din Propoziţia 1. Totuşi, se pot stabili unele echivalenţe între diferite variante ale propoziţiilor enunţate mai sus.

Propoziţia 3 *Fie X un spaţiu metric complet şi (X_n) un şir de mulţimi închise din X.*

(i) Dacă mulţimea $\cup_{n\in\mathbf{N}}X_n$ are interior nevid atunci mulţimea $\cup_{n\in\mathbf{N}}\mathrm{int}X_n$ este nevidă.

(ii) Dacă $X=\cup_{n\in\mathbf{N}}X_n$ atunci există $n_0\in\mathbf{N}$ astfel încât $\mathrm{int}\,X_{n_0}\neq\emptyset$.

(iii) Dacă $X=\cup_{n\in\mathbf{N}}X_n$ atunci $\cup_{n\in\mathbf{N}}\mathrm{int}X_n$ este densă în X.

Propoziţia 4 *Fie X un spaţiu metric complet şi (X_n) un şir de mulţimi deschise şi dense din X. Atunci*

(a) $\cap_{n\in\mathbf{N}}X_n$ este nevidă;

(b) $\cap_{n\in\mathbf{N}}X_n$ este densă în X.

Este uşor de văzut că, printr-un argument simplu folosind legile lui De Morgan avem: $(i)\Leftrightarrow(b)$ şi $(ii)\Leftrightarrow(a)$. De asemenea, să observăm că (iii) rezultă din (i) aplicat mulţimilor închise şi cu interior vid, $X_n\setminus\mathrm{int}X_n$. Se obţine astfel egalitatea

$$\mathrm{int}\cup(X_n\setminus\mathrm{int}X_n)=\emptyset$$

care, împreună cu incluziunea

$$\cap(X\setminus(X_n\setminus\mathrm{int}X_n))\subset\cup\mathrm{int}X_n,$$

încheie demonstraţia punctului (iii).

Propoziţia 4 a fost demonstrată de Louis René Baire [5] în 1899 în cazul spaţiului $\mathbf{R}$. Un raţionament de acelaşi tip se găseşte şi la William F. Osgood în 1897. Felix Hausdorff publică demonstraţia Teoremei lui Baire în cazul general în 1914. Este interesant de precizat că enunţurile prezentate mai sus sunt adevărate şi în spaţii compacte.

Vom prezenta acum două rezultate mai generale decât Propoziţiile 3 şi 4 şi care sunt echivalente prin complementarietate. In spaţii metrice complete ele au fost stabilite de Corneliu Ursescu (comunicare personală).

Teorema 3 *Fie X un spaţiu metric complet sau un spaţiu compact. Fie (X_n) un şir de mulţimi închise din X. Atunci*

$$\overline{\bigcup_{n\geq 1} \operatorname{int} X_n} = \overline{\operatorname{int} \bigcup_{n\geq 1} X_n}.$$

Teorema 4 *Fie X un spaţiu metric complet sau un spaţiu compact. Fie (X_n) un şir de mulţimi deschise din X. Atunci*

$$\operatorname{int} \overline{\bigcap_{n\geq 1} X_n} = \operatorname{int} \bigcap_{n\geq 1} \overline{X_n}.$$

Demonstraţia Teoremei 4. Incluziunea

$$\operatorname{int} \overline{\bigcap_{n\geq 1} X_n} \subset \operatorname{int} \bigcap_{n\geq 1} \overline{X_n}$$

este evidentă. Pentru a demonstra incluziunea inversă este suficient să demonstrăm incluziunea

$$\operatorname{int} \bigcap_{n\geq 1} \overline{X_n} \subset \overline{\bigcap_{n\geq 1} X_n},$$

iar pentru aceasta este suficient să arătăm că pentru orice mulţime nevidă şi deschisă U din $\cap_{n\geq 1}\overline{X_n}$, mulţimea $U \cap (\cap_{n\geq 1} X_n)$ este nevidă. Fie deci U o mulţime nevidă şi deschisă din $\cap_{n\geq 1}\overline{X_n}$. Să observăm că pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ avem $U \subset \overline{X_n}$, deci $U \cap X_n$ este o mulţime deschisă şi nevidă. Pentru a arăta că mulţimea $U \cap (\cap_{n\geq 1} X_n)$ este nevidă, considerăm un proces inductiv alegând o mulţime nevidă şi deschisă V_1 astfel încât

$$\overline{V_1} \subset U \cap X_1.$$

In spaţii metrice alegem V_1 cu proprietatea suplimentară

$$\operatorname{diam}(\overline{V_1}) \leq 1$$

. Apoi, pentru fiecare număr natural $n > 2$ alegem o mulţime nevidă şi deschisă V_n astfel încât

$$\overline{V_n} \subset V_{n-1} \cap X_n.$$

In spaţii metrice alegem V_n cu proprietatea suplimentară

$$\operatorname{diam}(\overline{V_n}) \leq 1/n.$$

Să observăm că $\overline{V_n} \subset U \cap X_n$.

Mai departe, arătăm că

$$\cap_{n\geq 1}\overline{V_n} \neq \emptyset,$$

de unde rezultă imediat că $U \cap \cap_{n\geq 1} X_n \neq \emptyset$, ceea ce încheie demonstraţia.

Faptul că $\cap_{n\geq 1}\overline{V_n} \neq \emptyset$ se bazează pe argumente diferite în funcţie de natura spaţiului X. Dacă X este spaţiu metric complet atunci afirmaţia se bazează pe faptul că familia $\{\overline{V_n}\}$ este formată din mulţimi închise ale căror diametre converg la zero. Dacă X este spaţiu compact atunci familia $\{\overline{V_n}\}$ are proprietatea intersecţiei finite. □

Observaţia 2 Să remarcăm că demonstraţia de mai sus foloseşte Axioma alegerii dependente. Vezi Capitolul 5 pentru mai multe comentarii asupra aceste axiome. Este interesant de subliniat că în 1977 Charles E. Blair [18] a demonstrat că Teorema lui Baire implică Axioma alegerii dependente.

Cele două leme de bază, Lema 1 şi Lema 2, utilizate la demonstraţia Teoremei Robinson-Ursescu, conduc la un frumos rezultat stabilit de Petr P. Zabreĭko [99] în 1969 şi pe care îl vom demonstra mai jos. Este interesant că cele trei rezultate fundamentale ale analizei funcţionale liniare, teorema aplicaţiilor deschise, teorema graficului închis şi principiul mărginirii uniforme, se pot demonstra într-o manieră unitară şi simplă utilizând Lema lui Zabreĭko.

Lema 3 (Zabreĭko) *Orice seminormă numărabil subaditivă pe un spaţiu Banach este continuă.*

Demonstraţie. Seminorma p pe spaţiul Banach X este numărabil subaditivă dacă $p(\sum_n x_n) \leq \sum_n p(x_n)$ pentru orice serie convergentă $\sum_n x_n$ din X. Este uşor de văzut că, din proprietăţile seminormei, este suficient să stabilim continuitatea în origine. Pentru aceasta, considerăm mulţimea $A = \{x; p(x) \leq 1\}$ şi observăm că este convexă şi absorbantă. Prin urmare, $\overline{A}$ este închisă convexă şi absorbantă deci, pe baza Lemei 2, este vecinătate a originii. Pe de altă parte, este uşor de arătat, utilizând proprietatea seminormei de a fi numărabil subaditivă, că A este ideal convexă. Se aplică Lema 1 şi se deduce că A este vecinătate a originii. Acest fapt conduce la continuitatea în origine a seminormei p. □

Să demonstrăm acum cele trei rezultate fundamentale amintite mai sus, utilizând Lema lui Zabreĭko.

Demonstraţia Teoremei aplicaţiilor deschise (Teorema 1) Se consideră seminorma pe Y

$$p(y) = \inf\{\|x\|; x \in X,\ T(x) = y\}.$$

Pentru a demonstra că este numărabil subaditivă, fixăm $\varepsilon > 0$, luăm seria convergentă $\sum_n y_n$ în Y şi construim seria absolut convergentă $\sum_n x_n$ în X astfel: luăm $x_n \in X$ astfel încât $\|x_n\| < p(y_n) + 2^{-n}\varepsilon$ pentru orice n. Facem precizarea că am presupus, fără a restrânge generalitatea, că $\sum_n p(y_n)$ este convergentă. Avem

$$p(\sum_n y_n) \leq \| \sum_n x_n\| \leq \sum_n \|x_n\| < \sum_n p(y_n) + \varepsilon.$$

Cum ε este arbitrar, deducem că p este numărabil subaditivă. Aplicăm Lema 3 şi deducem că p este continuă, ceea ce conduce uşor la concluzia teoremei. □

Observaţia 3 O consecinţă remarcabilă a Teoremei 1 este următorul rezultat demonstrat pentru pima dată de Banach în 1929.

Dacă X este spaţiu Banach, orice operator bijectiv $T \in L(X)$ este un izomorfism.

Următorul rezultat este Principiul mărginirii uniforme, numit adesea Teorema Banach-Steinhaus deoarece o demonstraţie a sa a apărut într-o lucrare de Stefan Banach şi Hugo Steinhaus [10] din 1927. De fapt rezultatul a fost publicat mai întâi în 1923 de Theophil Henry Hildebrandt [46] iar rezultate particulare obţinuse mai înainte, în 1922, Hans Hahn [42] şi Stefan Banach în teza de doctorat. Este interesant că Hahn demonstrează teorema pentru funcţionale liniare continue printr-o metodă care nu foloseşte Teorema lui Baire şi care funcţionează şi în cazul general.

Teorema 5 *Fie $\{T_i; i \in I\}$ o familie nevidă de operatori din $L(X, Y)$, unde X este spaţiu Banach şi Y este spaţiu normat. Dacă $\sup\{\|T_i x\|; i \in X\}$ este finită pentru fiecare x din X atunci $\sup\{\|T_i\|; i \in X\}$ este finită.*

Demonstraţie. Considerăm seminorma

$$p(x) = \sup\{\|T_i x\|;\ i \in I\}.$$

Dacă $\sum_n x_n$ este o serie convergentă în X avem

$$\|T_i(\sum_n x_n)\| = \| \sum_n T x_n\| \leq \sum_n \|T x_n\| \leq \sum_n p(x_n)$$

pentru orice $i \in I$, de unde rezultă că $p(\sum_n x_n) \leq \sum_n p(x_n)$. Deci p este continuă, fapt care conduce uşor la concluzie. □

In sfârşit, să demonstrăm Teorema graficului închis, stabilită de S. Banach în 1932 [9].

Teorema 6 *Fie X şi Y spaţii Banach şi $T : X \to Y$ un operator liniar şi cu grafic închis. Atunci T este mărginit.*

Demonstraţie. Considerăm seminorma pe X

$$p(x) = \|Tx\|$$

şi arătăm că este numărabil subaditivă. Fie $\sum_n x_n$ o serie convergentă în X. Avem de arătat că $\|T(\sum_n x_n)\| \leq \sum_n \|Tx_n\|$, deci putem presupune că seria $\sum_n \|Tx_n\|$ este convergentă, care împreună cu completitudinea lui Y implică faptul că seria $\sum_n Tx_n$ este convergentă. Deoarece T are grafic închis, avem $\sum_n Tx_n = T(\sum_n x_n)$. Mai departe demonstraţia este imediată. $\square$

Iată alte aplicaţii interesante ale teoremei lui Baire.

(1) *Mulţimea numerelor raţionale nu este de tip G_δ, adică, intersecţie numărabilă de mulţimi deschise.* Vezi problema **??**.

(2) *Nu există funcţii $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care să fie continue pe mulţimea numerelor raţionale şi discontinue pe mulţimea numerelor iraţionale.* Vezi Problema **??**.

De fapt, mulţimea punctelor în care o funcţie reală de variabilă reală este continuă este de tip G_δ. Este interesant că există funcţii care să fie continue exact pe mulţimea numerelor iraţionale, deci mulţimea numerelor iraţionale este de tip G_δ. Vezi Problema **??**.

(3) *Mulţimea funcţiilor f din $C[0,1]$, pentru care există un punct x_f în $[0,1)$ în care f este derivabilă la dreapta, este de prima categorie în $C[0,1]$.* Vezi Problema **??**.

Amintim că o mulţime este de prima categorie dacă se poate scrie ca o reuniune numărabilă de mulţimi rare (pentru care interiorul aderenţei lor este vid). Din vremea lui Newton până la începutul secolului 19, majoritatea matematicienilor presupuneau că o funcţie reală definită pe un interval trebuie să fie derivabilă pe aproape tot domeniul de definiţie. In 1834, Bernard Bolzano a dat un exemplu de funcţie reală continuă pe un interval şi nederivabilă în orice punct din acel interval. Aproape un secol dupa aceea matematicienii au tratat acea funcţie ca un caz patologic. In 1931 [8] Stefan Banach a arătat, prin afirmaţia de mai sus, că “marea majoritate” a funcţiilor reale continue definite pe un interval real nu sunt derivabile în nici un punct.

(4) *Fie X un spaţiu Banach. O funcţie inferior semicontinuă sau superior semicontinuă, definită pe X cu valori reale, este continuă pe un rezidual (complementara unei mulţimi de prima categorie).* Vezi Problema **??**.

2 Aplicaţii la controlabilitatea sistemelor liniare

Să prezentăm în continuare o aplicaţie a Corolarului 2 la studiul controlabilităţii sistemelor liniare infinit dimensionale. Pentru aceasta avem nevoie de câteva elemente de teoria semigrupurilor liniare de clasă C_0. Nu vom intra în detalii, ci vom prezenta doar un minim necesar. Cititorul poate consulta [11] sau [95] pentru detalii.

Să ne amintim pentru început că dacă X şi U sunt spaţii finit dimensionale iar $A : X \to X$ şi $B : U \to X$ sunt operatori liniari, atunci soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t),\ y(0) = x,\ t \geq 0 \tag{1}$$

este dată de formula variaţiei constantelor

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \tag{2}$$

unde $S(t) = e^{At},\ t \geq 0$, este soluţia fundamentală a ecuaţiei $z'(t) = Az(t)$.

Teoria semigrupurilor liniare în spaţii Banach extinde conceptul de soluţie fundamentală la spaţii Banach arbitrare şi permite definirea cu ajutorul formulei (2) a soluţiei ecuaţiei (1) în situaţii mai generale. O clasă largă de sisteme de control guvernate de ecuaţii cu derivate parţiale sunt cazuri particulare ale ecuaţiei (1), considerate în spaţii infinit dimensionale.

Aşadar, o familie $S(t) : X \to X,\ t \geq 0$, formată din operatori liniari continui care verifică proprietatea semigrupală $S(t+s) = S(t)S(s),\ t, s \geq 0,\ S(0) = I$ şi satisface condiţia $\lim_{t\downarrow 0} S(t)x = x$, pentru $x \in X$, se numeşte *semigrup de clasă* C_0 pe X. Legătura dintre A şi $S(t)$ este dată de

$$Ax = \lim_{h\downarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h},$$

pentru $x \in \mathrm{Dom}(A)$. Operatorul închis şi dens definit A se numeşte *generatorul infinitezimal* al semigrupului $S(t)$. Dacă $S(t)$ este un semigrup de clasă C_0 atunci funcţia $t \mapsto S(t)x$ este continuă pe $[0, \infty)$ pentru orice $x \in X$. In plus, există constantele $\omega \in \mathbf{R}$ şi $M \geq 1$ astfel încât

$$\|S(t)\| \leq M \exp(\omega t),\ \forall t \geq 0.$$

In cele ce urmează ne vom referi la sistemul de control (1) cu soluţia (2) cu $B \in L(U, X)$. Controlul $u(\cdot)$ este din $\mathcal{U} = L^\infty([0, \infty); U)$.

Spunem că sistemul (1) este nul controlabil pe $[0, t]$ dacă pentru fiecare $x \in X$ există $u \in \mathcal{U}$ astfel încât $y(\cdot)$ dat de (2) verifică $y(t) = 0$, adică toate elementele din X pot fi transferate în origine prin acţiunea controalelor din $\mathcal{U}$. Să definim operatorul $V(t) : \mathcal{U} \to X$ prin

$$V(t)u = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds.$$

Este uşor de văzut că $V(t)$ este liniar şi mărginit. De asemenea, se observă că sistemul (1) este nul controlabil pe $[0, t]$ dacă

$$\mathrm{Im}(S(t)) \subset \mathrm{Im}(V(t)).$$

Să presupunem acum că avem restricţii asupra controlului, adică mulţimea controalelor admisibile este

$$U_{ad} = \{u \in \mathcal{U};\ \|u\| \leq \rho\},$$

ρ fiind o constantă pozitivă fixată. Aplicând Corolarul 2, deducem că nula controlabilitate a sistemului (1) este echivalentă cu existenţa unui $\delta > 0$ astfel încât

$$S(t)(B(0,\delta)) \subset V(t)(U_{ad}),$$

adică o întreagă sferă din jurul originii poate fi transferată în origine la timpul t prin acţiunea controalelor admisibile.

Pentru fiecare $t > 0$ definim mulţimea

$$R(t) = \{x \in X;\ \exists u \in U_{ad},\ S(t)x = V(t)u\},$$

adică mulţimea stărilor iniţiale care pot fi transferate în origine la timpul t cu controale admisibile. Definim de asemenea domeniul de nulă controlabilitate admisibilă

$$R = \bigcup_{t>0} R(t)$$

şi funcţia timp minimal

$$T(x) = \inf\{t;\ x \in R(t)\},\ x \in R.$$

Vom demonstra că dacă sistemul (1) este nul controlabil pe $[0, t]$ pentru orice $t > 0$, atunci R este deschisă şi funcţia $T(\cdot)$ este continuă pe R. Pentru aceasta demonstrăm mai întâi

Lema 4 *Presupunem că sistemul de control* (1) *este nul controlabil pe* $[0, \varepsilon]$. *Atunci*

(*a*) *Există* $\delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât dacă* $\|x\| \le \delta(\varepsilon)$ *avem* $x \in R(\varepsilon)$;

(*b*) *Pentru orice* $x \in R(t)$ *şi* $y \in X$ *care satisface*

$$\|y - x\| \le \frac{\delta(\varepsilon)}{M \exp(\omega t)}$$

avem $y \in R(t + \varepsilon)$.

Demonstraţie. (*a*) Sistemul fiind nul controlabil pe $[0, \varepsilon]$ avem

$$\mathrm{Im}(S(\varepsilon)) \subset \mathrm{Im}(V(\varepsilon)).$$

Considerând $T = S(\varepsilon)$ şi $S = V(\varepsilon)$ în Corolarul 2, deducem uşor (*a*). Pentru (*b*) pornim de la egalitatea

$$S(t + \varepsilon)y = S(\varepsilon)S(t)(y - x) + S(\varepsilon)S(t)x.$$

Deoarece $\|y - x\| \le \delta(\varepsilon)/M \exp(\omega t)$, având în vedere că $\|S(t)x\| \le M \exp(\omega t)\|x\|$, pentru orice $t \ge 0$, obţinem $\|S(t)(y-x)\| \le \delta(\varepsilon)$. Folosind (*a*), obţinem $S(t)(y-x) \in R(\varepsilon)$. Există deci $u_1 \in U_{ad}$ astfel încât

$$S(\varepsilon)S(t)(y - x) = V(\varepsilon)u.$$

Pe de altă parte, deoarece $x \in R(t)$, există $u_2 \in U_{ad}$ astfel încât $S(t)x = V(t)u_2$. Obţinem

$$S(\varepsilon)S(t)x = \int_0^t S(t - \varepsilon - s)Bu_2(s)ds$$

şi

$$S(t + \varepsilon)x = \int_t^{t+\varepsilon} S(t + \varepsilon - s)Bu_1(s - t)ds + \int_0^t S(t + \varepsilon - s)Bu_2(s)ds.$$

Punând

$$u(s) = \begin{cases} u_2(s) & \text{dacă } s \in [0, t] \\ u_1(s - t) & \text{dacă } s \in [t, t + \varepsilon], \end{cases}$$

deducem

$$S(t + \varepsilon)y = V(t + \varepsilon)u.$$

Deoarece $u \in U_{ad}$, obţinem $y \in R(t + \varepsilon)$, ceea ce trebuia demonstrat. □

Teorema 7 *Presupunem că sistemul* (1) *este nul controlabil pe* $[0, t]$ *pentru orice* $t > 0$. *Atunci* R *este deschisă şi funcţia timp minimal* $T(\cdot)$ *este continuă pe* R.

Demonstraţie. Faptul că R este deschisă rezultă imediat din Lema 2(b). Observaţia următoare va fi utilă în demonstraţie.

Pentru orice $y \in R$ şi $\varepsilon > 0$ avem $y \in R(T(y) + \varepsilon)$.

Intr-adevăr, aceasta rezultă din definiţia funcţiei timp minimal şi din faptul că $R(s) \subset R(t)$ pentru $s < t$.

Fie acum $y_0 \in R$ şi $\varepsilon > 0$ fixat. Să notăm $\delta = \delta(\varepsilon/2)$ dat de Lema 4(a), $\beta(t) = M \exp(\omega t)$ şi

$$K = \left\{ y \in X;\ \|y - y_0\| \leq \frac{\delta}{2\beta(T(y_0) + 2\varepsilon)} \right\}.$$

Fie $y_i \in K,\ i = 1, 2$. Deoarece $\beta(\cdot)$ este crescătoare avem

$$\|y_i - y_0\| \leq \frac{\delta}{2\beta(T(y_0) + \varepsilon/2)},\ i = 1, 2.$$

Având în vedere că $y_0 \in R(T(y_0) + \varepsilon/2)$, folosind şi Lema 4$(b)$, deducem

$$T(y_i) \leq T(y_0) + \varepsilon,\ i = 1, 2.$$

Pe de altă parte,

$$\|y_1 - y_2\| \leq \frac{\delta}{\beta(T(y_0) + 2\varepsilon)}$$

şi deci

$$\|y_1 - y_2\| \leq \frac{\delta}{\beta(T(y_i) + \varepsilon/2)}.$$

Utilizăm încă o dată Lema 4(b) şi obţinem $y_1 \in R(T(y_2)+\varepsilon)$ şi $y_2 \in R(T(y_1)+\varepsilon)$, ceea ce implică $T(y_1) \leq T(y_2) + \varepsilon$ şi $T(y_2) \leq T(y_1) + \varepsilon$. Am arătat astfel că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există

$$\delta_1 = \frac{\delta(\varepsilon/2)}{2\beta(T(y_0) + 2\varepsilon)}$$

care depinde de y_0 şi ε, astfel încât pentru orice y_1, y_2 cu $\|y_i - y_0\| \leq \delta_1$, $i = 1, 2$, avem

$$|T(y_1) - T(y_2)| \leq \varepsilon.$$

Deci T este continuă în y_0. □

Am discutat mai sus problema trasferului unei date iniţiale în origine. O problemă naturală este aceea a controlabilităţii exacte pe $[0, t]$ a sistemului (1). Mai precis, spunem că sistemul (1) este *exact controlabil* pe $[0, t]$ dacă pentru fiecare $z \in X$ există un control $u \in \mathcal{U}$ astfel încât y dat de (2) verifică $y(0) = 0$ şi $y(t) = z$.

Aceasta înseamnă că toate elementele din X pot fi atinse la timpul t prin acţiunea controalelor din $\mathcal{U}$. Este clar că sistemul (1) este exact controlabil pe $[0,t]$ dacă operatorul $V(t)$ este surjectiv. Pe baza principiului aplicaţiilor deschise, deducem că proprietatea de controlabilitate exactă a sistemului (1) este echivalentă cu existenţa unui $\delta > 0$ astfel încât $B(0,\delta) \subset V(t)(U_{ad})$, adică punctele dintr-o întreagă sferă din jurul originii pot fi atinse la timpul t prin acţiunea controalelor admisibile.

Observaţia 4 Controlabilitatea exactă în spaţii infinit dimensionale este destul de restrictivă. Dacă B este compact (cazul ecuaţiilor hiperbolice de ordinul al doilea) sau semigrupul $S(t)$ este compact (cazul ecuaţiilor parabolice) [95] atunci operatorul $V(t)$ este compact (vezi Teorema **??**) deci nu este surjectiv. Vezi şi Observaţia **??**.

3 Teorema de inversare locală şi Teorema Lyusternik - Graves

Prezentăm în continuare un rezultat de aceeaşi natură cu Principiul aplicaţiilor deschise în cazul funcţiilor diferenţiabile. Să ne amintim Teorema 1:

Dacă $T \in L(X,Y)$ este surjectiv, există $\gamma > 0$ astfel încât pentru orice $y \in Y$ există $x \in X$ cu $Tx = y$ şi $\|x\| \leq \gamma\|y\|$.

In cele ce urmează, oricare din constantele $\gamma > 0$ cu proprietatea de mai sus se va numi *constantă de surjectivitate* pentru operatorul surjectiv T.

Teorema 8 (Graves) *Fie X şi Y spaţii Banach, $T \in L(X,Y)$ un operator surjectiv cu $\gamma > 0$ constantă de surjectivitate şi $0 < \delta < 1/\gamma$. Fie $U \subset X$ o mulţime deschisă, $x_0 \in U$ şi $f : U \to Y$ o funcţie continuă cu proprietatea*

$$\|f(u) - f(v) - T(u - v)\| \leq \delta\|u - v\|$$

pentru orice u şi v cu $\|u - x_0\| < r$ şi $\|v - x_0\| < r$. In aceste condiţii, dacă $\|y - f(x_0)\| < r(1/\gamma - \delta)$, există o soluţie a ecuaţiei $f(x) = y$ ce satisface

$$\|x - x_0\| \leq (1/\gamma - \delta)^{-1}\|y - f(x_0)\|.$$

Demonstraţie. Construim inductiv un şir (ξ_n) astfel: $\xi_0 = 0$ iar, pentru $n \geq 1$, ξ_n este astfel încât

$$T(\xi_n - \xi_{n-1}) = y - f(x_0 + \xi_{n-1}) \tag{3}$$

şi

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leq \gamma\|y - f(x_0 + \xi_{n-1})\|. \tag{4}$$

Deducem cu uşurinţă

$$T(\xi_n - \xi_{n-1}) = T(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}) - f(x_0 + \xi_{n-1}) + f(x_0 + \xi_{n-2}),$$

deci

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \le \gamma\delta\|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}\| \tag{5}$$

dacă $\|\xi_{n-1}\| < r$ şi $\|\xi_{n-2}\| < r$. Acest fapt este adevărat pentru orice n. Intr-adevăr, observăm mai întâi că din (3) şi (4), $\|\xi_1\| < r(1-\gamma\delta)$. Deoarece $\xi_0 = 0$, avem (5) pentru $n = 2$. De aici se obţine

$$\|\xi_2\| = \|\xi_1 + \xi_2 - \xi_1\| \le \|\xi_1\|(1+\gamma\delta) < r$$

şi deci are loc (5) pentru $n = 3$. Presupunem (5) adevărată până la n şi deducem

$$\|\xi_n\| \le \|\xi_1\|(1 + \gamma\delta + \cdots + (\gamma\delta)^{n-1}) < r, \tag{6}$$

ceea ce implică (5) pentru $n+1$. Mai departe, din (5) rezultă că şirul (ξ_n) este convergent la ξ, din (3) deducem că $y = f(x_0+\xi)$, din (4) avem $\|\xi_1\| \le \gamma\|y - f(x_0)\|$ iar din (6) deducem

$$\|\xi\| \le (1-\gamma\delta)^{-1}\|\xi_1\| \le (1/\gamma - \delta)^{-1}\|y - f(x_0)\|$$

şi demonstraţia este terminată. □

Corolarul 7 *Fie $T \in L(X,Y)$ un operator surjectiv cu constanta $\gamma > 0$. Dacă $S \in L(X,Y)$ este astfel încât $\|S - T\| \le 1/2\gamma$, atunci S este surjectiv cu constanta 2γ.*

Demonstraţie. Se aplică Teorema 8 cu $f = S$ şi $x_0 = 0$. In particular, rezultă că mulţimea operatorilor surjectivi este deschisă în $L(X,Y)$. Vezi şi Problema **??**. □

Inainte de a prezenta următorul rezultat, să amintim noţiunea de diferenţiabilitate Fréchet. Fie X şi Y spaţii normate, $U \subset X$ o mulţime deschisă şi $f : U \to Y$ o funcţie. Spunem că f este diferenţiabilă Fréchet în $x_0 \in U$ dacă există un operator, notat $f'(x_0)$, cu proprietatea că $f'(x_0) \in L(X,Y)$ şi

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}(f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h) = 0.$$

Spunem că f este de clasă C^1 pe U dacă f este diferenţiabilă Fréchet şi f' (privită ca funcţie de la U în $L(X,Y)$) este continuă în fiecare punct din U.

Să amintim de asemenea următoarea teoremă de medie:

Dacă $f : U \to Y$ este diferenţiabilă Fréchet în orice punct din segmentul $[a, b] \subset U$, atunci

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{u \in]a,b[} \|f'(u)\| \|b - a\|.$$

Pentru demonstraţia acestei teoreme precum şi pentru alte rezultate legate de diferenţiabilitate în spaţii Banach trimitem la [101].

Teorema 9 (Lyusternik-Graves) *Fie X şi Y spaţii Banach, $U \subset X$ o mulţime deschisă, $x_0 \in U$, $f : U \to X$ o funcţie diferenţiabilă Fréchet cu f' continuă în x_0 şi $f'(x_0)$ surjectivă. In aceste condiţii, există constantele pozitive r, ρ şi ω astfel încât, dacă $\|p - x_0\| < \rho$ şi $\|y - f(x_0)\| < r$, există x ce satisface $f(x) = y$ şi*

$$\|x - p\| \leq \omega \|y - f(p)\|.$$

Demonstraţie. Deoarece f' este continuă în x_0, există $\rho_1 > 0$ astfel încât, dacă $\|x - x_0\| < \rho_1$, avem $\|f'(x) - f'(x_0)\| < 1/8\gamma$, unde γ este o constantă de surjectivitate pentru operatorul surjectiv $f'(x_0)$. Aplicând Corolarul 7 deducem că, pentru $\|p - x_0\| < \rho_1$, $f'(p)$ este surjectiv cu constanta 2γ. Din teorema de medie enunţată mai sus şi aplicată funcţiei $x \mapsto f(x) - f'(p)x$ obţinem

$$\|f(u) - f(v) - f'(p)(u - v)\| \leq \|u - v\| \sup_{t \in [a,b]} \|f'(t) - f'(p)\|. \tag{7}$$

Din (7), dacă $\|p - x_0\| < \rho_1$, avem

$$\|f(u) - f(v) - f'(p)(u - v)\| \leq \frac{1}{4\gamma} \|u - v\| \tag{8}$$

pentru $\|u - x_0\| < \rho_1$ şi $\|v - x_0\| < \rho_1$. Pe de altă parte, există $\rho_2 > 0$ cu $\rho_2 \leq \rho_1/2$ astfel încât, dacă $\|p - x_0\| < \rho_2$, avem

$$\|f(p) - f(x_0)\| < \frac{\rho_1}{16\gamma}.$$

Să arătăm că $\rho = \rho_2$, $r = \rho_1/8\gamma$ şi $\omega = 4\gamma$ verifică toate cerinţele concluziei. Fie deci $\|p - x_0\| < \rho$ şi $\|y - f(x_0)\| < r$. Observăm că pentru $\|u - p\| < \rho_1/2$ şi $\|v - p\| < \rho_1/2$ avem $\|u - x_0\| < \rho_1$, $\|v - x_0\| < \rho_1$ şi deci (8) arată că suntem în condiţiile Teoremei 8 cu $T = f'(p)$ şi 2γ în loc de γ. Este clar că dacă $\|y - f(x_0)\| < r$ atunci $\|y - f(p)\| < \rho_1/8\gamma$ şi deci există o soluţie a ecuaţiei $f(x) = y$ care satisface

$$\|x - p\| \leq 4\gamma \|y - f(p)\|.$$

Demonstraţia teoremei este încheiată. $\square$

Observaţia 5 Concluzia Teoremei 9 afirmă, în particular, că există o vecinătate deschisă V a lui x_0, conţinută în U, care are proprietatea că pentru fiecare $p \in V$ şi fiecare S_p, sferă deschisă centrată în p şi conţinută în V, $f(S_p)$ este vecinătate pentru $f(p)$.

Observaţia 6 Estimarea $\omega = 4\gamma$, unde γ este constanta de surjectivitate a operatorului $f'(x_0)$, nu este cea mai bună. Aceasta provine din faptul că am aplicat Teorema 8 cu $\delta = 1/2\gamma$. De fapt, marginea inferioară a valorilor lui ω pentru care are loc teorema de mai sus este γ.

Lawrence M. Graves [40] a demonstrat în 1950 Teorema 8 şi Corolarul 7. Lazar Aronovich Lyusternik [62] (1934) a introdus condiţia ca $f'(x_0)$ să fie operator surjectiv şi procedeul iterativ prezentat în demonstraţia Teoremei 8 pentru a obţine următorul rezultat.

Corolarul 8 (Lyusternik) *Fie f ca în Teorema 9 şi fie $f(x_0) = 0$. Atunci spaţiul tangent la $f^{-1}(0)$ în x_0 este $x_0 + \ker f'(x_0)$.*

Demonstraţie. Se aplică Teorema 9 cu $y = 0$ şi $p \in x_0 + \ker f'(x_0)$ şi se deduce că există $x \in f^{-1}(0)$ astfel încât $\|x - p\| \leq \omega \|f(p)\|$, adică

$$d(p, f^{-1}(0)) \leq \omega \|f(p) - f(x_0) - f'(x_0)(p - x_0)\|.$$

De aici se obţine imediat

$$\lim_{\substack{p \to x_0 \\ p \in x_0 + \ker f'(x_0)}} \frac{d(p, f^{-1}(0))}{\|p - x_0\|} = 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Teorema lui Graves se utilizează în obţinerea unor rezultate de existenţă pentru ecuaţii neliniare plecând de la rezultate similare pentru aproximări liniare ale acestora. Unele probleme, de exemplu cele legate de controlabilitatea cu restricţii a sistemelor neliniare au impus următoarea variantă.

Teorema 10 *Fie X şi Y spaţii Banach, $D \subset X$ o mulţime deschisă, $x_0 \in D$, $L \subset X$ un con convex închis şi $f : D \to Y$ o funcţie diferenţiabilă Fréchet cu f' continuă în x_0 şi cu proprietatea $f'(x_0)(L) = Y$. Atunci există o vecinătate V a punctului $f(x_0)$ şi o constantă $\gamma > 0$ astfel încât, pentru fiecare $y \in V$, ecuaţia $f(x) = y$ are o soluţie în $x_0 + L$ care satisface inegalitatea $\|x - x_0\| \leq \gamma \|y - f(x_0)\|$.*

Demonstraţie. Se procedează ca în Teorema 8 cu observaţia că γ este obţinută aplicând Teorema aplicaţiilor deschise procesului convex închis $F : X \rightsquigarrow Y$ definit prin

$$F(x) = \begin{cases} f'(x_0)x & \text{dacă } x \in L \\ \emptyset & \text{dacă } x \notin L. \end{cases}$$

Ipoteza $f'(x_0)(L) = Y$ asigură faptul că F este surjectiv şi deci există $\gamma > 0$ încât, pentru $y \in Y$, există $x \in L$ cu $f'(x_0)x = y$ şi $\|x\| \leq \gamma \|y\|$. □

Teorema 9 se mai numeşte şi *Teorema surjecţiei*, datorită condiţiei ca $f'(x_0)$ să fie surjectiv. Să ne amintim că pentru Teorema de inversare locală se cere ca $f'(x_0)$ să fie şi injectiv. Mai precis avem

Teorema 11 (Teorema de inversare locală) *Fie X şi Y spaţii Banach, $U \subset X$ o mulţime deschisă, $x_0 \in U$, $f : U \to Y$ o funcţie de clasă C^1 cu proprietatea că $f'(x_0)$ este un operator bijectiv. Atunci există o vecinătate W a lui $f(x_0)$ în Y şi o vecinătate V a lui x_0 în X astfel încât pentru orice $y \in W$ există o soluţie unică $x \in V$ a ecuaţiei $f(x) = y$. Mai mult funcţia f^{-1} este de clasă C^1 pe W şi derivata sa este dată prin $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$. Dacă f este de clasă C^k, $k > 1$, atunci f^{-1} este de clasă C^k.*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea, luăm $x_0 = 0$ şi $f(x_0) = 0$. In plus, este suficient să discutăm inversarea locală a funcţiei $f'(0)^{-1}f$ şi deci suntem conduşi la a considera cazul în care $f = I + g$, unde g este de clasă C^1 şi $g'(0) = 0$. Aici I este operatorul identitate pe X. Fie $r > 0$ astfel încât $\|g'(u)\| < 1/2$ pentru $\|u\| < r$. Folosind teorema de medie deducem că pentru orice $u, v \in B(0, r)$ avem

$$\|g(u) - g(v)\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|. \tag{9}$$

Deci g este o contracţie şi $\|g(u)\| \leq \|u\|/2$ pentru $\|u\| < r$. Pentru $v \in X$ fixat, punem

$$g_v(u) = v - g(u).$$

Este clar că g_v este o contracţie. Mai mult, pentru $u \in B(0, r)$ şi $v \in B(0, r/2)$ avem $\|g_v(u)\| \leq r$ şi deci, pentru $v \in B(0, r/2)$, g_v este o contracţie, duce $B(0, r)$ în ea însăşi, prin urmare are un punct fix unic $u \in B(0, r)$ care satisface

$$u = g_v(u) = v - g(u),$$

deci $f(u) = v$. Aşadar, putem defini funcţia $f^{-1} : B(0, r/2) \to B(0, r)$. Să arătăm că f^{-1} este de clasă C^1. Pentru aceasta, arătăm mai întâi ca f^{-1} este lipschitziană.

Punem $p = f^{-1}(u)$ şi $q = f^{-1}(v)$, adică $p + g(p) = u$ şi $q + g(q) = v$. Folosind (9) obţinem

$$\|p - q\| \le \|u - v\| + \|g(p) - g(q)\| \le \|u - v\| + \frac{1}{2}\|p - q\|,$$

deci

$$\|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| \le 2\|u - v\|.$$

Aşadar f^{-1} este Lipschitz continuă cu constanta 2.

Fie acum $y \in W = B(0, r/2)$ şi $x = f^{-1}(y)$. Să arătăm că

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}. \tag{10}$$

Din $x + g(x) = y$ avem $f^{-1}(y) = y - g(f^{-1}(y))$. Având în vedere că funcţia g este diferenţiabilă în 0 şi $g'(0) = 0$ iar f^{-1} este lipschitziană, deducem uşor că funcţia $y \mapsto g(f^{-1}(y))$ are diferenţiala în punctul 0 egală cu 0. De aici rezultă că $(f^{-1})'(0) = I$. Aceasta implică (10) pe baza unor translaţii care să ducă x şi y în origine. Să detaliem acest fapt. Considerăm funcţia

$$h(u) = f'(x)^{-1}(f(u + x) - y)$$

şi observăm că $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ şi deci, pe baza celor demonstrate mai sus, $(h^{-1})'(0) = I$. Aceasta, împreună cu faptul că $h^{-1}(v) = f^{-1}(y + f'(x)v) - x$, arată că (10) este adevărată. In sfârşit, pentru a arăta că f^{-1} este de clasă C^1 observăm că $(f^{-1})'$ apare ca o compunere de trei funcţii continue şi anume f^{-1}, f' şi J, unde operatorul $J : \mathrm{Inv}(X, Y) \to L(Y, X)$ este definit prin $J(A) = A^{-1}$. Am notat cu $\mathrm{Inv}(X, Y)$ mulţimea operatorilor $A \in L(X, Y)$ care sunt inversabili (bijectivi). Să subliniem faptul că din Teorema aplicaţiilor deschise (Teorema 1) rezultă că dacă X şi Y sunt spaţii Banach iar $A \in L(X, Y)$ este bijectiv atunci $A^{-1} \in L(Y, X)$. Operatorul J este de clasă C^∞.

Ultima afirmaţie din enunţ se demonstrează prin inducţie. □

Observaţia 7 Teorema de inversare locală dă condiţii în care, pentru orice y dintr-o vecinătate a lui y_0, ecuaţia $f(x) = y$ poate fi rezolvată unic în x într-o vecinătate a lui x_0. Demonstraţia prezentată mai sus se bazează pe aplicarea Teoremei de punct fix a lui Banach funcţiei $x \to (f'(x_0))^{-1}(y - f(x)) + x$ şi deci conduce la următoarea procedură iterativă:

$$x_{n+1} = x_n + (f'(x_0))^{-1}(y - f(x_n)).$$

Se poate utiliza şi metoda lui Newton:

$$x_{n+1} = x_n + (f'(x_n))^{-1}(y - f(x_n))$$

care dă o convergenţă mai rapidă (vezi Problema **??**).

Observaţia 8 In cazul în care $\ker f'(x_0)$ admite un complement închis X_1, Teorema 9 se deduce din Teorema de inversare locală aplicată restricţiei lui f la $x_0 + X_1$.

Teorema de inversare locală conduce imediat la

Teorema 12 (Teorema funcţiilor implicite) *Fie X, Y şi Z spaţii Banach, D o mulţime nevidă şi deschisă în $X \times Y$, $F : D \to Z$ o funcţie de clasă C^p, $p \geq 1$, $(u_0, v_0) \in D$ astfel încât $F(u_0, v_0) = 0$ şi $F'_v(u_0, v_0)$ este operator bijectiv. In aceste condiţii, există $r > 0$ şi o vecinătate V a lui v_0 astfel încât, dacă $\|u - u_0\| < r$, există o unică soluţie $v = v(u)$ în V a ecuaţiei $F(u, v) = 0$. Mai mult, aplicaţia $u \mapsto v(u)$ este de clasă C^p şi derivata este dată de formula*

$$v'(u) = -(F'_v(u, v(u)))^{-1} F'_u(u, v(u)).$$

Demonstraţie. Se aplică Teorema 11 funcţiei $f : D \to X \times Z$ definită prin $f(u, v) = (u, F(u, v))$. □

Avem şi o teoremă a funcţiilor implicite de tip surjectiv.

Teorema 13 *Fie X, Y şi Z spaţii Banach, D o mulţime nevidă şi deschisă în $X \times Y$, $F : D \to Z$ o funcţie diferenţiabilă Fréchet cu F' continuă în $(u_0, v_0) \in D$ astfel încât $F(u_0, v_0) = 0$ şi $F'_v(u_0, v_0)$ este operator surjectiv. In aceste condiţii, există $r > 0$ şi $\omega > 0$ astfel încât, dacă $\|u - u_0\| < r$, există v cu proprietatea $F(u, v) = 0$ şi $\|v - v_0\| \leq \omega \|u - u_0\|$.*

Demonstraţie. Se consideră funcţia $f : D \to X \times Z$ definită prin $f(u, v) = (u, F(u, v))$. Avem

$$f'(u_0, v_0)(u, v) = (u, F'_u(u_0, v_0)u + F'_v(u_0, v_0)v).$$

Este clar că sunt îndeplinite ipotezele Teoremei 9 cu $x_0 = (u_0, v_0)$. Concluzia Teoremei 9 cu $p = x_0$, $y = (u, 0)$ conduce la rezultat. □

Observaţia 9 In condiţiile Teoremei 13 putem defini o funcţie h pe $S(u_0, r)$, continuă în u_0, astfel încât $h(u_0) = v_0$ şi $F(u, h(u)) = 0$ pentru $u \in S(u_0, r)$.

In Teorema 9 se presupune că funcţia f este diferenţiabilă Fréchet şi f' este continuă în x_0. O problemă naturală este dacă se poate presupune că f este doar diferenţiabilă in x_0. Răspunsul este negativ în general dar este pozitiv în cazul când Y este de dimensiune algebrică finită. Mai precis, dacă X este un spaţiu Banach de dimensiune infinită, se poate construi o funcţie continuă $f : X \to X$ cu următoarele proprietăţi:

(a) f este diferenţiabilă Fréchet în 0 şi $f'(0) = I$;

(b) $f(X)$ nu conţine o vecinătate a originii;

(c) f nu este injectivă pe nici o vecinătate a originii.

O astfel de funcţie se poate construi astfel: fie mulţimile $B = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$, $U = \{x \in X; \|x\| = 1\}$ şi $p : B \to U$ o funcţie continuă cu $p(x) = x$ pentru orice $x \in U$. Existenţa funcţiei p este dată de Teorema **??**. Extindem p la X prin $p(x) = x$ dacă $\|x\| > 1$ şi considerăm elementul $e \in X$ cu $\|e\| = 1$ şi apoi şirurile

$$a_n = \frac{1}{n}e, \ r_n = \frac{1}{4n^2}, \ B_n = \{x \in X; \|x - a_n\| < r_n\}.$$

Funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in X \setminus \cup_n B_n \\ r_n p(\frac{x-a_n}{r_n}) + a_n & \text{dacă } x \in B_n \end{cases}$$

verifică (a), (b), (c).

Pentru a demonstra (a), observăm mai întâi că, dacă $x \in B_n$, avem

$$\|f(x) - x\| \leq r_n + \|x - a_n\| \leq 2r_n.$$

Având în vedere că

$$\|a_n\| - \|x\| \leq \|x - a_n\| \leq r_n,$$

obţinem

$$\frac{\|f(x) - x\|}{\|x\|} \leq \frac{2r_n}{\|a_n\| - r_n} \to 0.$$

Fie $\varepsilon > 0$ şi fie n_0 cu proprietatea că, pentru $n \geq n_0$,

$$2r_n/(\|a_n\| - r_n) < \varepsilon.$$

Un calcul simplu arată că există $\delta > 0$ astfel încât, dacă $x \in B_n$ şi $\|x\| < \delta$, avem $n \geq n_0$. Prin urmare, dacă $\|x\| < \delta$ avem $\|f(x) - x\|/\|x\| < \varepsilon$, ceea ce arată că funcţia f este diferenţiabilă Fréchet in 0 şi $f'(0) = I$.

Pentru (b) se demonstrează mai întâi că

$$f(X) = X \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n.$$

Pentru aceasta este suficient să dovedim că pentru $y \in B_m$ nu există $x \in B_n$ astfel încât

$$r_n p(\frac{x - a_n}{r_n}) + a_n = y.$$

Aceasta rezultă din faptul că

$$\|r_n p(\frac{x-a_n}{r_n}) + a_n - a_m\| \geq r_m$$

pentru orice m şi n.

In sfârşit, pentru (c), se observă că funcţia p nu este injectivă. Pentru aceasta luăm z cu $\|z\| < 1$ şi observăm că ecuaţia $p(x) = p(z)$ are cel puţin două soluţii distincte, $x = z$ şi $x = p(z)$. De aici rezultă că funcţia f nu este injectivă pe nici un B_n. Cum orice vecinătate a originii conţine B_n pentru n suficient de mare, afirmaţia de la (c) este dovedită.

Este interesant de subliniat că, dacă f este doar diferenţiabilă fără a fi de clasă C^1, proprietatea (c) de mai sus poate fi satisfăcută şi de funcţii pentru care $f'(x_0)$ este un operator bijectiv. Iată de exemplu funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x+2x^2 \sin 1/x$ pentru $x \neq 0$, $f(0) = 0$, are proprietăţile:

(i) $f'(0) = I$;

(ii) Există un şir x_n convergent la 0 astfel încât $f'(x_n) = 0$ şi $f''(x_n) < 0$.

Din (ii) rezultă că f nu este injectivă pe o vecinătate a lui x_n şi deci pe nici o vecinătate a originii.

Dacă Y este finit dimensional avem

Teorema 14 *Fie X şi Y spaţii Banach cu Y de dimensiune algebrică finită, $U \subset X$ o mulţime deschisă, $x_0 \in U$, $f : U \to X$ o funcţie continuă pe U, diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi astfel încât operatorul $f'(x_0)$ este surjectiv. Atunci există constantele pozitive r şi ω astfel încât, dacă $\|y - f(x_0)\| < r$, există o soluţie a ecuaţiei $f(x) = y$ cu proprietatea*

$$\|x - x_0\| \leq \omega \|y - f(x_0)\|.$$

Demonstraţie. Demonstraţia se bazează pe Teorema de punct fix a lui Brouwer. Să presupunem că $x_0 = f(x_0) = 0$. Deoarece $f'(0)$ este operator surjectiv, există o funcţie continuă $H : Y \to X$ astfel încât $f'(0)H = I$; vezi Problema **??**. Din faptul ca f este diferenţiabilă Fréchet în 0 se deduce că

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(Hy) - y}{\|y\|} = 0.$$

Există deci r_0 astfel încât

$$\|f(Hy) - y\| \leq \frac{1}{2}\|y\|$$

pentru $\|y\| \leq r_0$. Se aplică acum Teorema de punct fix a lui Brouwer (vezi Problema **??**) pentru a deduce că, pentru orice $r \leq r_0$, avem

$$B(0, r/2) \subset f(H(B(0, R))).$$

Pentru $y \in Y$ cu $\|y\| \leq r_0/2$ folosim incluziunea de mai sus cu $r = 2\|y\|$ şi deducem existenţa unui $z \in Y$ astfel încât $\|z\| \leq r$ şi $f(Hz) = y$. Este clar că $x = Hz$ satisface cerinţele teoremei. □

Incheiem această secţiune cu o aplicaţie a Teoremei Lyusternik-Graves la teoria multiplicatorilor lui Lagrange pentru problema de minim abstractă:

$$\min f(x) \quad \text{cu restricţia} \quad g(x) = 0, \tag{11}$$

unde $f : X \to \mathbf{R}$ şi $g : X \to Y$ iar X şi Y sunt spaţii normate. De altfel, acesta a fost scopul principal al lui Lyusternik în [62].

Incepem cu un rezultat care scoate în evidenţă importanţa proprietăţii de regularitate metrică.

Teorema 15 *Preupunem că x_0 este soluţie a problemei de minim* (11). *Dacă f satisface condiţia Lipschitz într-o vecinătate a lui x_0 şi g are proprietatea de regularitate metrică în* $(x_0, 0)$, *atunci există $\alpha > 0$ astfel încât x_0 este punct de minim local* (*fară restricţii*) *a funcţiei $f(x) + \alpha\|g(x)\|$.*

Demonstraţie. Din ipoteză există $K > 0$, $L > 0$ astfel încât

$$f(x) - f(y) \leq L\|x - y\|, \quad d(x, g^{-1}(0)) \leq K\|g(x)\|$$

pentru x, y într-o vecinătate a lui x_0. Luăm un astfel de x şi fie $u \in g^{-1}(x_0)$ astfel încât $\|x - u\| \leq (K+1)\|g(x)\|$. Atunci

$$f(x) \geq f(u) - L\|x - u\| \geq f(x_0) - Ld(x, g^{-1}(0)) \geq f(x) - L(K+1)\|g(x)\|,$$

deci $f(x) + L(K+1)\|g(x)\| \geq f(x_0)$. □

Observaţia 10 Rezultatul se poate extinde uşor la spaţii metrice. De asemenea, se pot considera restricţii de forma $0 \in G(x)$ unde G este o multifuncţie.

Următoarea teoremă este extinderea teoremei clasice a multiplicatorilor lui Lagrange la problema abstractă (11).

Teorema 16 *Fie spaţiile Banach X şi Y şi funcţiile $f : X \to \mathbf{R}$, $g : X \to Y$. Presupunem că f are un minim local în x_0 relativ la restricţia $g(x) = 0$, f şi g sunt de clasă C^1 pe o vecinătate a lui x_0 şi $g'(x_0)$ este operator surjectiv. Atunci*

(*i*) *$f'(x_0)h = 0$ pentru acei h pentru care $g'(x_0)h = 0$;*

(*ii*) *Există $y^* \in Y^*$ astfel încât $f'(x_0) + y^*(g'(x_0)) = 0$.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că există h astfel încât $g'(x_0)h = 0$ şi $f'(x_0)h \neq 0$. Atunci funcţia $F : X \to \mathbf{R} \times Y$ definită prin $F(x) = (f(x), g(x))$ are proprietatea că

$$F'(x_0) = (f'(x_0), g'(x_0)) : X \to \mathbf{R} \times Y$$

este operator surjectiv. Intr-adevăr, fie $(a, y) \in \mathbf{R} \times Y$. Deoarece $g'(x_0)$ este operator surjectiv, există $u \in X$ încât $g'(x_0)u = y$. Există $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât $f'(x_0)\lambda h = a - f'(x_0)u$. Este clar că $f'(x_0)(u + \lambda h) = a$ şi $g'(x_0)(u + \lambda h) = y$. Deci operatorul $F'(x_0)$ este surjectiv. Aplicăm Teorema 9 şi deducem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există x cu $\|x - x_0\| < \varepsilon$ şi există $\delta > 0$ astfel încât

$$F(x) = (f(x_0) - \delta, 0),$$

ceea ce contrazice ipoteza de minim local. Prin urmare, afirmaţia de la (*i*) este demonstrată.

Din (*i*) deducem că $f'(x_0)$, care este un element din X^*, este ortogonal pe $\ker(g'(x_0))$. Dar

$$\ker(g'(x_0))^\perp = \overline{\mathrm{Im}(g'(x_0)^*)}.$$

Pe de altă parte, $\mathrm{Im}(g'(x_0)^*)$ este mulţime închisă fiindcă $g'(x_0)$ este surjectiv. Deducem astfel existenţa unui element $y^* \in Y^*$ cu proprietatea

$$f'(x_0) = -g'(x_0)^*(y^*) = -y^*(g'(x_0)).$$

□

4 Aplicaţii la controlabilitatea sistemelor neliniare

Prezentăm o aplicaţie a Teoremei 9 la studiul controlabilităţii sistemelor neliniare. Considerăm ecuaţia

$$y'(t) = Ay(t) + Fy(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \tag{12}$$

cu condiţia iniţială $y(0) = x$. Operatorul liniar A generează un semigrup de clasă C_0, $S(t),\ t \geq 0$, pe spaţiul Banach X, F este o aplicaţie neliniară de la X la X, iar $B \in L(U, X)$, U fiind un spaţiu Banach.

Presupunem că F este lipschitziană pe X, astfel că ecuaţia integrală

$$y(t) = S(t)x + \int_t^0 S(t-s)F(y(s))ds + \int_t^0 S(t-s)Bu(s))ds$$

are soluţie continuă $y : [0, T] \to X$. Aici $T > 0$ şi $u(\cdot) \in L^\infty(0, T; U)$ sunt fixaţi. Această funcţie se consideră drept soluţie a ecuaţiei (12) pe $[0, T]$. In cele ce urmează vom lua $x = 0$ şi vom defini funcţia $\phi : L^\infty(0, T; U) \to X$, prin $\phi(u) = y(T)$, unde $y(\cdot)$ este soluţia ecuaţiei

$$y(t) = \int_t^0 S(t-s)F(y(s))ds + \int_t^0 S(t-s)Bu(s)ds,\ t \in [0, T].$$

Vom presupune că F este de clasă C^1 pe X şi $F(0) = 0$. Un calcul direct arată că, în aceste condiţii, funcţia ϕ este de clasă C^1 pe $L^\infty(0, T; U)$ şi

$$\phi'(0)(v) = z(T),$$

unde $z(\cdot)$ este soluţia ecuaţiei liniare

$$z'(t) = (A + F'(0))z(t) + Bv(t), \tag{13}$$

cu $z(0) = 0$.

Spunem că sistemul liniar (13) este global controlabil pe $[0, T]$ dacă, pentru orice $z_1 \in X$, există $v \in L^\infty(0, T; U)$ astfel încât soluţia ecuaţiei (13) cu $z(0) = 0$ să verifice $z(T) = z_1$.

Corolarul 9 *Presupunem că $F : X \to X$ este de clasă C^1 şi $F(0) = 0$. Presupunem în plus că sistemul liniar* (13) *este global controlabil pe* $[0, T]$*. Atunci, pentru $\rho > 0$, există $r > 0$ încât pentru orice $x_1 \in X$ cu $\|x_1\| < r$ există $u \in L^\infty(0, T; U)$ cu $\|u\| \leq \rho$ astfel încât soluţia ecuaţiei* (12) *cu $y(0) = 0$ să verifice $y(T) = x_1$.*

Altfel spus, dacă sistemul liniarizat este global controlabil atunci sistemul iniţial este local controlabil în jurul originii. Demonstraţia Corolarului 9 este imediată dacă avem în vedere Teorema 9.

References

[1] Aubin J.-P., Cellina A., *Differential Inclusions,* Springer-Verlag, 1984.

[2] Aubin J.-P., Frankowska H., *Set-Valued Analysis,* Birkhäuser, 1990.

[3] Arzelà C., Funzioni di linee, Atti della R. Accad. dei Lincei Rendiconti della Cl.Si. Fis. mat. Nat., (4) 5, 1889, 342-348

[4] Ascoli G., Le curve limite di una varieta data di curve, Atti della R. Accad. dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 18, 1882-1883, 521-586.

[5] Baire L. R., Sur les functions de variable réelles, Ann. Mat. Pura Appl., (3) 3, 1899, 1-222.

[6] Banach S., Sur les opéerations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales, Fund. Math., 3, 1922, 133-181.

[7] Banach S., Sur les functionelles linéaires, Studia Math., 1, 1929, 211-216 şi 223-239.

[8] Banach S., Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Math., 3, 1931, 174-179.

[9] Banach S., *Théorie des Opérations linéaires*, Monografje matematyczne, Warsaw, 1932.

[10] Banach S, Steinhaus H., Sur le principe de la condensation de singularités, Fund. Math., 9, 1927, 50-61.

[11] Barbu V., *Semigrupuri de Contracţii Neliniare în Spaţii Banach*, Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[12] Barbu V., Metode Matematice în Optimizarea Sistemelor Diferenţiale, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[13] Bebernes J. W., Schuur J.D., The Ważewski topological method for contingent equations, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 87, 1970, 271-279.

[14] Begle E. G., A fixed point theorem, Ann. of Math., (2) 51, 1950, 544-550.

[15] Bielecki A., Une remarque sur la méthode de Banach- Caccioppoli-Tikhonov dans la théorie des équations differentielles ordinaires, Bull. Acad. Polon Sci. Cl. III, 4, 1956, 261-264.

[16] Birkhoff G. D., Proof of Poincaré's geometric theorem, Trans. Amer. Math. Soc., 14, 1913, 14-22.

[17] Birkhoff G. D., Kellogg O. D., Invariant points in functin space, Trans. Amer. Math. Soc., 23, 1922, 96-115.

[18] Blair C. E., The Baire category theorem implies the principle of dependent choices, Bull. Acad. Polon. Sci., 25, 1977, 933-934.

[19] Bohnenblust H., Karlin S., On a theorem of Ville, In: Contributions to the theory of games, Kuhn and Tucker Eds., 155-160, University Press, Princeton, 1950.

[20] Borsuk K., Sur les rétractes, Fund. Math., 17, 1931, 152-170.

[21] Brézis H., Browder F., A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis, Adv. in Mathematics, 21, 1976, 355-364.

[22] Brown R.F., Elementary cosequences of the noncontractibility of the circle, Amer. Math. Monthly, 81, 1974, 247-252.

[23] Browder F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177, 1968, 283-301.

[24] Brouwer L.E.J., Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 71, 1912, 97-115.

[25] Caccioppoli R., Una teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale, Ren. Accad. Naz Lincei, 11, 1930, 794-799.

[26] Cazenave T., Haraux A., *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[27] Cârjă O., Ursescu C., The characteristics method for a first order partial differential equation, An. Şti. Univ.“Al.I.Cuza” Iaşi Secţ. I a Mat., 39, 1993, 367 - 396.

[28] Cârjă O., Vrabie I. I., Some new viability results for semilinear differential inclusions, NoDEA, 4, 1997, 401-424.

[29] Cellina A., Approximation of set-valued functions and fixed points theorems, Ann. Mat. Pura Appl., 82, 1969, 17-24.

[30] Costinescu O., *Elemente de topologie generală*, Editura tehnică, Bucureşti, 1969.

[31] Deimling K., *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, 1992.

[32] Dieudonné J.A., Une généralisation des espaces compactes, J. Math. Pures Appl., 23, 1944, 65-76.

[33] Dugundji J., An extension of Tietze's theorem, Pacific J. Math., 1, 1951, 353-367.

[34] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[35] Ekeland I., On the variational principle, J. Math. Anal. Appl., 74, 1974, 324-353.

[36] Feferman S., Independence of the axiom of choice from the axiom of independence choices, J. Sym. Logic, 29, 1967, 226.

[37] Gheorghiu N., *Introducere în Analiza Funcţională,* Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[38] Glicksberg I.L., A further generalization of the Kakutani fixed theorem, with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. Math. Soc., 3, 1952, 170-174.

[39] Goursat E., Sur la théorie des fonctions implicites, Bull. Soc. Math. France, 31, 1903, 184-192.

[40] Graves L.M., Some mapping theorems, Duke Math. J., 17, 1950, 111-114.

[41] Gröger K., A simple proof of the Brouwer fixed point theorem, Math. Nachr., 102, 1981, 293-295.

[42] Hahn H., Über Folgen linearen Operationen, Monatsh. math. Phys., 32, 1922, 3-88.

[43] Halmos P., Vaughan H., The marriage problem, 72, 1950, 214-215.

[44] Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Verlag von Veit, Leipzig, 1914.

[45] Hill L.S., Properties of certain aggregate functions, Amer. J. Math., 49, 1927, 419-432.

[46] Hildebrandt T. H., On uniform limitedness of sets of functional operators, Bull. Amer. Math. Soc., 29, 1923, 309-315.

[47] Holmes R., *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer, 1975.

[48] Kakutani S., A generalization of Brouwer's fixed-point theorem, Duke Math. J., 8, 1941, 457-459.

[49] Kantorovici L.V., Akilov G.P., *Analiză Funcţională,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[50] Karamardian S., Generalized complementarity problem, J. Optim. Theory Appl., 8, 1971, 161-168.

[51] Kelley J.L., The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, Fund. Math., 37, 1950, 75-76.

[52] Klein E., Thompson A.C., *Theory of Correspondences*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[53] Kuratowski K., Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés, Fund. Math., 18, 1932, 148-180.

[54] Kuratowski K., *Topology*, Academic Press, New York, 1966.

[55] Ky Fan, Fixed-point and minimax theorems in locally convex linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., 38, 1952, 121-126.

[56] Ky Fan, A minimax inequality and applications, in: Inequalities III, 103-113, Academic Press, New York, 1972.

[57] Ky Fan, Glicksberg I., Some geometric properties of the spheres in a normed linear space, Duke Math. J., 25, 1958, 553-568.

[58] Leray J, Schauder J., Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 51, 1934, 45-78.

[59] Lichtenstein L., Über einige Existenzprobleme der Variationsrehnung. Methode der unendlichvielen Variabeln, J. Reine Angew. Math., 145, 1915, 24-85.

[60] Lifshits E.A., Ideally convex sets, Funct. Anal. Appl., 4, 1970, 330-331, tradus din Funkts. Anal. Prilozh., 4, 1970, 76-77

[61] Lindenstrauss J, Tzafriri L, On the complemented subspaces problem, Israel J. Math., 9, 1971, 263-269.

[62] Lyusternik L.A., Conditional extrema of functionals, Mat. Sb., 41, 1934, 390-401.

[63] Marchaud A., Sur les champs continus de demi-cones convex et leur integrales, Comp. math., 3, 1936, 89-127.

[64] Megginson R. E., *An Introduction to Banach Spaces Theory*, Springer, 1998.

[65] Michael E., Continuous selections I, Ann. Math., 63, 1956, 361-382.

[66] Michael E., Continuous selections II, Ann. Math., 64, 1956, 562-580.

[67] Miranda C., Un'osservazione su un teorema di Brouwer, Boll. Un. Mat. Ital., (2) 3, 1940, 527.

[68] Moore R. L., Concerning upper semicontinuous collections of continua, Trans. Amer. Math. Soc., 27, 1925, 416-428.

[69] Moore E. H., Smith H. L., A general theory of limits, Amer. J.Math., 44, 1922, 102-121.

[70] Nadler S. B. Jr., Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math., 30, 1969, 475-488.

[71] Nagumo M., Über die Lage der Integralkurven gewönlicher Differentialgleichungen, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 24, 1942, 551-559.

[72] Ostrowski A.M., The round-off stability of iterations, Z. Angew. Math. Mech., 47, 1967, 77-81.

[73] Phillips R. S., On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 48, 1940, 516-541.

[74] Picard E., Mémoire sur la théorie des équations aux dérivés partielles et la méthode des approximations successives, J. Math. Pures Appl. 6, 1890, 145-210.

[75] Picone M., *Lezioni di analizi infinitesimale*, vol. 1, Circolo Matematico di Catania, Catania, Italy, 1923.

[76] Popa E., *Culegere de Probleme de Analiză Funcţională,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[77] Precupanu A., *Analiză Matematică. Funcţii Reale,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

[78] Precupanu A., *Bazele Analizei Matematice,* Editura Universităţii "Al.I.Cuza" Iaşi, Iaşi, 1993.

[79] Precupanu T., *Spaţii Liniare Topologice şi Elemente de Analiză Convexă,* Editura Academiei, Bucureşti, 1992.

[80] Robinson S., Regularity and stability for convex multivalued functions, Math. Oper. Res., 1, 1976, 130-143.

[81] Rudin M.E., A new proof that metric spaces are paracompact, Proc. Am. Math. Soc., 20, 1969, 603.

[82] Saint Raymond J., Multivalued contractions, Set-Valued Anal., 2, 1994, 559-571.

[83] Schauder J., Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math.Z., 26, 1927, 63-98.

[84] Schauder J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math., 2, 1930, 171-180.

[85] Schauder J., Über lineare, vollstetige funktionaloperationen, Studia Mat., 2, 1930, 183-196.

[86] Stampacchia G., Formes bilinéaires coercitives sur les ensemble convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964, 4413-4416.

[87] Steinlein H., On two results of J. Dugundji about extensions of maps and retractions, Proc. Amer. Math. Soc., 77, 1979, 289-290.

[88] Stone A.H., Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 1948, 977-982.

[89] Tychonoff A.N., Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Anal., 102, 1930, 544-561.

[90] Tychonoff A. N., Über einen Funktionenräum, Math. Ann., 111, 1935, 767-776.

[91] Tychonoff A. N., Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111, 1935,

[92] Ursescu C., Multifunctions with closed convex graph, Czech. Math. J., 25, 1975, 438-441.

[93] Urysohn P., Über die Mächtigkeit der Zusammenhängenden Mengen, Math. Ann., 94, 1925, 262-295.

[94] Vrabie I. I., *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Second Edition, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **75**, Longman, 1995.

[95] Vrabie I. I., *Semigrupuri de Operatori Liniari şi Aplicaţii*, Editura Universităţii "Al.I.Cuza", Iaşi, 2001.

[96] Von Neumann J., Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Math. Ann., 100, 1928.

[97] Von Neumann J., Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Browerschen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, Vienna 8, 1937, 73-83.

[98] T. Ważewski, Sur une condition équivalent à l'équation au contingent, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. e Phys.*, **9** (1961), pp. 865-867.

[99] Zabreĭko P.P., A theorem for semiadditive functionals, Functional Anal. Appl., 3, 1969, 70-72.

[100] Zaremba S.K., Sur les equations au paratingent, Bull. Sci. Math., 60, 1936, 139-160.

[101] Zălinescu C., *Programare Matematică în Spaţii Infinit Dimensionale*, Editura Academiei, Bucureşti, 1999.

[102] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications; Part I: Fixed-Point Theorems, Part II: Monotone Operators, Part III: Variational Methods and Optimization, Parts IV/V: Applications to Mathematical Physics*, Springer, 1984.

Cursurile 11-14, Teoreme de punct fix

Teoria punctelor fixe a fost introdusă de Henri Poincaré în anii 1880. El a arătat că soluţiile unor importante probleme analitice pot fi studiate definindu-se o mulţime X şi o funcţie $f : X \to X$ în aşa fel încât soluţiile corespund punctelor fixe ale funcţiei f, adică, punctelor $x \in X$ pentru care $f(x) = x$. Teoria punctelor fixe a început deci, ca răspuns la nevoile analizei neliniare. Poincaré a enunţat prima teoremă de punct fix, într-o lucrare din 1911, în legătură cu soluţiile periodice pentru problema celor trei corpuri din mecanica cerească, teoremă ce a fost demonstrată de George D. Birkhoff [16] în 1913. De fapt, analiza neliniară se bazează pe două teoreme de punct fix:

- Teorema de punct fix a lui Banach, în cadrul spaţiilor metrice complete;
- Teorema de punct fix a lui Brouwer, în cadrul mulţimilor convexe şi compacte.

Sigur că există numeroase variaţii sau extensii ale acestora (de exemplu teoremele de punct fix ale lui Schauder, Kakutani, Caristi) ori alte rezultate (de exemplu Teorema lui Ekeland, Inegalitatea lui Ky Fan, Teorema Leray - Schauder) care reprezintă instrumente de bază în studiul unor clase de probleme specifice ale analizei neliniare.

In acest capitol ne vom ocupa de cele două teoreme amintite mai sus precum şi de alte rezultate legate de acestea.

1 Teorema de punct fix a lui Banach

Fie (X, ρ) un spaţiu metric. Spunem că funcţia $F : X \to X$ este *contracţie* de constantă $\alpha \in (0, 1)$ dacă pentru orice $x, y \in X$ avem

$$\rho(F(x), F(y)) \leq \alpha\rho(x, y).$$

Problema pe care dorim s-o rezolvăm este ecuaţia

$$F(x) = x,\ x \in X,$$

utilizând metoda iterativă:

$$x_{n+1} = F(x_n),\ n \geq 0, \tag{1}$$

unde $x_0 \in X$. O soluţie a ecuaţiei de mai sus se numeşte *punct fix* pentru funcţia F.

Teorema 1 *Fie* (X,ρ) *un spaţiu metric complet şi* $F : X \to X$ *o* α*-contracţie. Atunci,*

(*i*) F *are punct fix unic în* X*, adică, există un singur element* $u \in X$ *astfel încât* $F(u) = u$*;*

(*ii*) *Pentru fiecare* $x_0 \in X$ *şirul* (x_n) *construit iterativ în* (1) *converge la unicul punct fix al funcţiei* F*;*

(*iii*) *Pentru* $n \geq 0$ *avem estimarea* a priori

$$\rho(x_n, u) \leq \alpha^n (1-\alpha)^{-1} \rho(x_1, u)$$

şi estimarea a posteriori

$$\rho(x_n, u) \leq \alpha(1-\alpha)^{-1} \rho(x_n, x_{n-1});$$

(*iv*) *Viteza de convergenţă este dată de*

$$\rho(x_{n+1}, u) \leq \alpha\rho(x_n, u), \ \forall n \geq 0;$$

(*v*) *Pentru orice* $x \in X$ *avem*

$$\rho(x, u) \leq \frac{1}{1-\alpha} \rho(x, F(x)). \tag{2}$$

Demonstraţie. Fixăm un element arbitrar $x \in X$ şi considerăm şirul dat de (1) cu $x_0 = x$. Vom arăta că (x_n) este şir Cauchy. Pentru $k \geq 1$ avem

$$\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(F(x_k), F(x_{k-1})) \leq \alpha\rho(x_k, x_{k-1}).$$

Aplicarea repetată a acestei inegalităţi implică

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha^k \rho(x_1, x).$$

Acum, folosind inegalitatea triunghiulară pentru $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$, avem

$$\rho(x_m, x_n) \leq (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha^n)\rho(x_1, x). \tag{3}$$

De aici se obţine uşor că $\rho(x_m, x_n) \leq \alpha^n(1-\alpha)^{-1}\rho(x_1, x)$, ceea ce arată că (x_n) este şir Cauchy, deci convergent la $u \in X$. Trecând la limită în egalitatea $x_{n+1} = F(x_n)$, obţinem $F(u) = u$. Unicitatea este imediată. Facem $m \to \infty$ în (3) şi obţinem estimarea a priori, iar pentru $n = 0$ obţinem (2). Pentru estimarea a posteriori, facem $m \to \infty$ în inegalitatea

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \leq (\alpha + \alpha^1 + \ldots + \alpha^m)\rho(x_n, x_{n-1}).$$

$\square$

Estimarea a priori determină numărul maxim de paşi ai iteraţiei necesari pentru obţinerea preciziei dorite, cunoscându-se valoarea iniţială x_0 şi valoarea x_1. Estimarea a posteriori ne permite să folosim valorile x_n şi x_{n-1} pentru a determina acurateţea aproximării x_n. Experienţa arată că a doua metodă este mai eficientă.

Teorema 1, numită şi *principiul contracţiilor*, sau *Teorema de punct fix a lui Banach* a fost demonstrată de Stefan Banach [6] în 1922 în cadrul spaţiilor normate complete. Ca o lemă preliminară pentru demonstrarea teoremei funcţiilor implicite, Edouard Goursat a enunţat şi a demonstrat un rezultat similar 20 de ani mai devreme, în 1903 [39], pentru contracţii de la o sferă închisă din $\mathbf{R}^n$ în ea însăşi. Ideea utilizării aproximaţiilor succesive în demonstraţie provine de la Joseph Liouville (1830), care a utilizat-o pentru prima dată în studiul existenţei soluţiilor în teoria ecuaţiilor diferenţiale liniare. Emile Picard a folosit sistematic metoda aproximaţiilor succesive la studiul ecuaţiilor neliniare, ordinare şi cu derivate parţiale. Primul memoriu al lui Picard dedicat acestei teorii a fost publicat în 1890 [74].

Demonstraţia este constructivă, dându-se un mod precis de aproximare a punctului fix. Iată o aplicaţie simplă. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi u un punct fix pentru f pentru care $|f'(u)| < 1$. Se verifică uşor că se îndeplinesc condiţiile Teoremei 1 pentru X un interval închis suficient de mic centrat în u. Deci u se poate aproxima pornind cu un x_0 adecvat şi considerând şirul de iteraţii prezentat mai sus. Sunt situaţii când printr-o modificare a funcţiei se verifică $|f'(u)| < 1$. De exemplu, ecuaţia $x^3 + x - 1 = 0$ are o singură soluţie u, punct fix pentru funcţia $f(x) = 1 - x^3$. Se vede uşor că $|f'(u)| > 1$. Dar u este punct fix şi pentru funcţia

$$g(x) = (1/5)(3x + 2 - 2x^3)$$

pentru care $|g'(u)| < 1$.

In situaţii practice este necesar să se aproximeze valorile lui $F(x_n)$ din şirul iteraţiilor. Apare astfel o problemă firească. Dacă se înlocuieşte şirul x_n definit prin (1) cu (y_n) unde $y_0 = x$ şi y_{n+1} aproximează $F(y_n)$, în ce condiţii avem $\lim_{n\to\infty} y_n = u$, punctul fix al lui F? Rezultatul următor răspunde la această problemă şi a fost obţinut de Alexander M. Ostrowski [72] în 1967.

Teorema 2 *Fie (X, ρ) un spaţiu metric complet, $F : X \to X$ o α-contracţie şi $u \in X$ punctul fix al lui F. Fie (ε_n) un şir de numere pozitive convergent la 0, fie*

$y_0 \in X$ *şi presupunem că şirul* (y_n) *satisface*

$$\rho(y_{n+1}, F(y_n)) \leq \varepsilon_n \quad \forall n \geq 1.$$

Atunci $\lim_{n\to\infty} y_n = u$.

Demonstraţie. Luăm $y_0 = x$ şi considerăm şirul (x_n) dat de (1). Avem

$$\rho(x_{m+1}, y_{m+1}) \leq \rho(F(x_m), F(y_m)) + \rho(F(y_m), y_{m+1})$$

$$\leq \alpha\rho(x_m, y_m) + \varepsilon_m \leq \sum_{i=0}^{m} \alpha^{m-i}\varepsilon_i,$$

$$\rho(y_{m+1}, u) \leq \rho(y_{m+1}, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, u) \leq \sum_{i=0}^{m} \alpha^{m-i}\varepsilon_i + \rho(x_{m+1}, u).$$

Luăm acum $\varepsilon > 0$. Există $k \in \mathbf{N}$ astfel încât pentru $m \geq k$ avem $\varepsilon_m \leq \varepsilon$. Atunci

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha^{m-i}\varepsilon_i \leq \alpha^{m-k} \sum_{i=0}^{k} \alpha^{k-i}\varepsilon_i + \varepsilon \sum_{i=k+1}^{m} \alpha^{m-i}.$$

Obţinem

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \alpha^{m-i}\varepsilon_i \leq \varepsilon(\alpha^{k+1}/(1-\alpha).$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar iar $\lim_{m\to\infty} \rho(x_{m+1}, u) = 0$ obţinem $\lim_{m\to\infty} y_{m+1} = u$. $\square$

Vezi Problema **??** pentru o demonstraţie a Teoremei 1 pe baza principiului variaţional al lui Ekeland.

Să prezentăm un exemplu pentru a ilustra utilitatea principiului contracţiilor. Considerăm ecuaţia integrală Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_0^x g(x, y)u(y)dy, \tag{4}$$

unde f şi g sunt funcţii continue pe $[0, a]$ respectiv $[0, a] \times [0, a]$. Definim operatorul $F : C[0, a] \to C[0, a]$ prin

$$F(u(x)) = f(x) + \int_0^x g(x, y)u(y)dy$$

şi observăm că pentru orice $u, v \in C[0, a]$

$$\|F(u - F(v)\| \leq aL\|u - v\|,$$

unde $L = \sup\{|g(x,y)|; x,y \in [0,a]\}$. Teorema de punct fix a lui Banach se poate astfel aplica pe orice interval pentru care se verifică inegalitatea $aL < 1$. Aceasta nu e o problemă gravă fiindcă, prin metode standard de prelungire, se poate arăta existenţa soluţiei pe $[0,a]$. Pe de altă parte, Adam Bielecki în 1956 [15] a descoperit o altă metodă de a remedia problema. El a introdus o nouă normă pe $C[0,a]$,

$$\|u\|_\lambda = \sup_{0\le x\le a} \exp(-\lambda x)|u(x)|,$$

echivalentă cu norma uniformă şi faţă de care F este (L/λ)-lipschitziană şi deci contracţie dacă λ este suficient de mare. O altă metodă constă în utilizarea următoarei variante a Teoremei 1, aparent mai tare. Vezi demonstraţia Teoremei 19.

Corolarul 1 *Fie şirul fe funcţii F^n definit inductiv prin $F^1 = F$ şi $F^{n+1} = F \circ F^n$. Dacă există $k \ge 1$ astfel încât F^k este contracţie, atunci F are punct fix unic.*

Demonstraţie. Fie u punctul fix pentru F^k. Punem în (2) $x = F(u)$ şi obţinem $\rho(u, F(u)) \le (1-\alpha)^{-1}\rho(F^k(F(u)), F(u)) = 0$, şi deci $F(u) = u$. Pentru unicitate, dacă y este punct fix pentru F atunci el este punct fix şi pentru F^k. Deci $y = u$. □

Observaţia 1 Corolarul de mai sus este interesant şi prin faptul că funcţia F nu este presupusă nici măcar continuă. Deşi rezultatul a fost enunţat în formă abstractă abia în anii 1960, el se regaseşte într-o lucrare a lui Georg Hamel din 1922 privind studiul soluţiilor periodice pentru ecuaţia pendulului.

Următoarea teoremă dă o condiţie în care punctul fix al unei contracţii depinde continuu de un parametru.

Teorema 3 *Fie (X,ρ) şi (T,r) spaţii metrice, X complet. Fie $g : X \times Y \to X$ continuă. Presupunem că există $\alpha \in (0,1)$ astfel încât*

$$\rho(g(x,t), g(y,t)) \le \alpha\rho(x,y)$$

pentru orice $t \in T$ şi $x,y \in X$. Dacă $\varphi(t)$ este unicul punct u pentru care $g(u,t) = u$, atunci φ este continuă de la T la X.

Demonstraţie. Fie $t_0 \in T$ şi $\varepsilon > 0$. Continuitatea lui g în $(\varphi(t_0), t_0)$ implică existenţa unui $\delta > 0$ pentru care dacă $r(t,t_0) < \delta$ atunci

$$\rho(g(\varphi(t_0), t), g(\varphi(t_0), t_0)) = \rho(g(\varphi(t_0), \varphi(t_0)) < \varepsilon(1-\alpha).$$

Fie $r(t_1, t_0) < \delta$. Inegalitatea (2) implică

$$\rho(\varphi(t_0), \varphi(t_1)) \leq \frac{\rho(\varphi(t_0), g(\varphi(t_0), t_1))}{1-\alpha} < \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat. □

O aplicaţie interesantă a teoremei de mai sus, utilizată in demonstraţia teoremei de inversare locală, este următoarea.

Fie X spaţiu Banach şi $f : X \to X$ o contracţie. Atunci funcţia $x \mapsto x + f(x)$ este homeomorfism de la X la X.

Vezi Problema **??** pentru demonstraţie. Incheiem această secţiune cu o extensie interesantă obţinută de Renato Caccioppoli [25] în 1930.

Presupunem că există un şir (c_n) astfel încât $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ şi

$$\rho(F^n(x), F^n(y)) \leq c_n \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Atunci şirul iteraţiilor (1) *converge la unicul punct fix al funcţiei F.*

2 Teorema de punct fix a lui Brouwer

Teorema 4 (Brouwer) *Fie B sfera unitate închisă centrată în origine din spaţiul $\mathbf{R}^p$ şi $f : B \to B$ o funcţie continuă. Atunci există $x \in B$ astfel încât $f(x) = x$.*

Inainte de a demonstra Teorema 4, să observăm că ea se poate extinde la cazul când se înlocuieşte B cu orice spaţiu topologic Ω care este homeomorf cu B. Intr-adevăr, fie $g : \Omega \to B$ un homeomorfism şi fie $f : \Omega \to \Omega$ o funcţie continuă. Atunci $g \circ f \circ g^{-1}$ este continuă pe B şi ia valori în B. Există deci $y \in B$ astfel încât

$$g \circ f \circ g^{-1}(y) = y.$$

Evident, $x = g^{-1}(y) \in \Omega$ este punct fix pentru f.

Situaţia cea mai simplă este când Ω este o sferă închisă dintr-un spaţiu normat finit dimensional. Mai general, are loc următorul rezultat.

Corolarul 2 *Fie Ω o mulţime nevidă convexă şi compactă dintr-un spaţiu normat finit dimensional, şi $f : \Omega \to \Omega$ o funcţie continuă. Atunci există $x \in \Omega$ astfel încât $f(x) = x$.*

Demonstraţia Corolarului 2 O primă demonstraţie, pe care o vom schiţa doar, se bazează pe faptul că o mulţime convexă nevidă finit dimensională (adică dimensiunea varietăţii liniare generate de ea este finită), are interiorul relativ nevid [79, p.237]. Prin urmare, o mulţime convexă care are cel puţin două elemente distincte este homeomorfă cu o mulţime convexă cu interior nevid dintr-un spaţiu de tipul $\mathbf{R}^p$ cu $p \in \mathbf{N}$. Deci, o mulţime convexă şi compactă care nu se reduce la un punct este homeomorfă cu o mulţime închisă convexă mărginită şi cu interior nevid din $\mathbf{R}^p$. Demonstraţia se încheie pe baza faptului că într-un spaţiu Banach o mulţime convexă închisă mărginită şi cu interior nevid este homeomorfă cu sfera unitate închisă centrată în origine [49, p.528].

Vom prezenta în continuare o demonstraţie directă. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că spaţiul de bază este $\mathbf{R}^p$. Dacă Ω este o sferă închisă, după cum am remarcat deja, rezultatul este adevărat. Fie $r > 0$ astfel încât $\Omega \subset B(0,r)$. Fie $P : B(0,r) \to \Omega$ definită prin $P(x) = y$ unde y este unicul punct în Ω cu proprietatea

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\|;\ \forall z \in \Omega\}.$$

Este cunoscut că P este continuă (chiar lipschitziană). Deci

$$f \circ P : B(0,r) \to \Omega \subset B(0,r)$$

are cel puţin un punct fix $x \in B(0,r)$, adică $f(P(x)) = x$. Având în vedere că $f(P(x)) \in \Omega$, rezultă că $x \in \Omega$. Prin urmare, $P(x) = x$ şi deci $f(x) = x$. Demonstraţia Corolarului 2 este încheiată. □

Demonstraţia Teoremei 4 se bazează pe următoarea lemă datorată lui Karol Borsuk [20] (1931).

Lema 1 *Fie* $U = \{x \in \mathbf{R}^p; \|x\| = 1\}$. *Nu există o funcţie continuă* $f : B \to U$ *astfel încât* $f(x) = x$ *pentru orice* $x \in U$.

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că există o funcţie f cu proprietăţile indicate. Prelungim f la o funcţie continuă $f_1 : \mathbf{R}^p \to U$ prin $f_1(x) = x/\|x\|$ pentru orice x cu $\|x\| > 1$. Aplicând teorema de aproximare a lui Weierstrass, există $f_2 : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ de clasă C^1 astfel încât $\|f_2(x) - f_1(x)\| < 1$ pentru orice x cu $\|x\| \le 2$. Considerăm funcţia $f_3 : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ definită prin

$$f_3(x) = (1 - \varphi(\|x\|))f_1(x) + \varphi(\|x\|)f_2(x),$$

unde $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie de clasă C^1 verificând condiţiile

$$0 \le \varphi(t) \le 1, \quad \varphi(t) = 1\ \forall t \le 3/2, \ \varphi(t) = 0\ \forall t \ge 2.$$

Se poate lua de exemplu

$$\varphi(t) = \frac{1}{16}t^3 - \frac{21}{64}t^2 + \frac{9}{16}t - \frac{5}{16}$$

pentru $t \in (3/2, 2)$. Este uşor de văzut că f_3 este de clasă C^1, $f_3(x) = x/\|x\|$ pentru orice x cu $\|x\| \geq 2$ şi

$$\|f_3(x)\| \geq \|f_1(x)\| - \varphi(\|x\|) \cdot \|f_2(x) - f_1(x)\| > \|f_2(x) - f_1(x)\|(1 - \varphi(\|x\|)) \geq 0,$$

dacă $\|x\| < 2$, deoarece

$$1 = \|f_1(x)\| > \|f_2(x) - f_1(x)\|.$$

Definim acum funcţia de clasă C^1, $f_4 : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ prin

$$f_4(x) = \frac{f_3(2x)}{\|f_3(2x)\|}.$$

Se observă că $\|f_4(x)\| = 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^p$ şi $f_4(x) = x/\|x\|$ pentru orice x cu $\|x\| \geq 1$. Este clar că f_4 este lipschitziană pe B. Fie L constanta Lipschitz şi fie $t \in [0, 1/L)$. Vom arăta în continuare că

$$(I + tf_4)B = (1 + t)B, \tag{5}$$

unde I este aplicaţia identică. Intr-adevăr, pentru $x \in B$ avem

$$\|x + tf_4(x)\| \leq \|x\| + t\|f_4(x)\| \leq 1 + t,$$

iar pentru $x \notin B$ avem

$$\|x + tf_4(x)\| = \|x + t\frac{x}{\|x\|}\| = \|x\| + t > 1 + t.$$

Pe de altă parte, alegerea lui t implică faptul că $t\|f_4'(x)\| < 1$ pentru $x \in B$ şi deci $I + tf_4'(x)$ este izomorfism iar

$$\det(I + tf_4'(x)) > 0$$

pentru $x \in B$. Aplicând teorema de inversare locală deducem că mulţimea $(I + tf_4)(B)$ este deschisă în $B(0, 1 + t)$. Ea este şi închisă, fiind compactă. Deoarece $B(0, 1 + t)$ este conexă, rezultă egalitatea (5). Aşadar, funcţia $I + tf_4 : B(0, 1) \to$

$B(0,1+t)$ este surjectivă. Ea este şi injectivă deoarece, dacă $(I+tf_4)(x) = (I+tf_4)(y)$ avem

$$\|x-y\| = t\|f_4(x) - f_4(y)\| \le tk\|x-y\|.$$

Având în vedere că $tk < 1$, obţinem $x = y$. Folosim acum formula schimbării de variabilă la integrala din $\mathbf{R}^p$ şi deducem

$$(1+t)^p \int_B dy = \int_{B(0,1+t)} dy = \int_{(I+tf_4)(B)} dy =$$

$$\int_B \det(I + tf_4'(x))dx = t^p \int_B \det f_4'(x)dx + P_{n-1}(t),$$

unde $P_{n-1}(t)$ este o funcţie polinomială de grad cel mult $n-1$. Prin identificare obţinem

$$\int_B \det f_4'(x)dx = \int_B dy \neq 0. \tag{6}$$

Pe de altă parte, $\|f_4(x)\|^2 = 1$ implică $(f_4'(x))^*(f_4(x)) = 0$, unde $(f_4'(x))^*$ este adjunctul operatorului liniar $f_4'(x)$. Deoarece $f_4(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^p$, deducem că $\det f_4'(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^p$, ceea ce contrazice (6) $\square$

Demonstraţia Teoremei 4 Presupunem, prin reducere la absurd, că $f(x) \neq x$ pentru orice $x \in B$. Se poate deduce cu uşurinţă că există o funcţie continuă $h : B \to [1,\infty)$ astfel încât, funcţia definită prin

$$g(x) = f(x) + h(x)(x - f(x))$$

are proprietatea că $\|g(x)\| = 1$ pentru $x \in B$. Mai precis, $g(x)$ este punctul unde semidreapta cu originea în $f(x)$ şi care conţine x intersectează U. Aplicând Lema 1, presupunerea făcută este falsă. $\square$

Observaţia 2 In demonstraţia Lemei 1 s-a utilizat teorema de aproximare a lui Weierstrass care este bine cunoscută în cazul unidimensional. Aici însă este vorba de funcţia $f_1 : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ continuă pe $B(0,2)$. Este clar că problema se reduce la aproximarea prin funcţii polinomiale ale funcţiilor $g : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ continue pe $B(0,2)$. Rezultatul este adevărat şi se bazează pe Teorema Stone-Weierstrass [77, p.16].

In cazul unidimensional, demonstraţia teoremei de punct fix a lui Brouwer se poate face pe baza teoremei valorilor intermediare, demonstrată de Bernard Bolzano în 1817:

Dacă o funcţie continuă $g : [-1,1] \to \mathbf{R}$ are proprietatea că $g(-1)g(1) \leq 0$ atunci există $c \in [-1,1]$ astfel încât $g(c) = 0$.

O proprietate similară are loc şi în cazul p-dimensional.

Teorema 5 *Fie mulţimea*

$$C = \{x = (x_1, ..., x_p); |x_i| \leq 1, \ \forall i = 1, ..., p\}$$

şi o funcţie continuă $g : C \to \mathbf{R}^p$, $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$. Presupunem că

$$g_i(x_1, ..., x_{i-1}, -1, x_{i+1}, ..., x_p) \geq 0$$

şi

$$g_i(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_p) \leq 0,$$

pentru orice $(x_1, x_2, ..., x_p) \in C$ şi pentru orice $i = 1, ..., p$. Atunci există $c \in C$ astfel încât $g(c) = 0$.

Pentru demonstraţie, vezi Problema **??**. Henri Poincaré a enunţat acest rezultat în 1883, pentru g diferenţiabilă, şi a publicat o demonstraţie trei ani mai tîrziu. Faptul că teorema p-dimensională a valorilor intermediare este echivalentă cu teorema lui Brouwer a fost stabilit de Carlo Miranda abia în 1940 [67].

Să prezentăm o altă demonstraţie pentru Teorema lui Brouwer în cazul 2-dimensional. Enunţul prezentat mai jos este chiar o versiune uşor mai tare.

Teorema 6 *Fie $U = \{x \in \mathbf{R}^2; \|x\| = 1\}$ şi $B = \{x \in \mathbf{R}^2; \|x\| \leq 1\}$. Fie funcţia $f : B \to \mathbf{R}^2$ continuă astfel încât $f(U) \subset B$. Atunci f are cel puţin un punct fix.*

Demonstraţie. Intr-o primă etapă se arată că, dacă o funcţie continuă $g : U \to U$ este homotopă cu o funcţie constantă, atunci există o funcţie continuă $u : U \to \mathbf{R}$ astfel încât $g(x) = \exp(iu(x))$ pentru orice $x \in U$. Vezi Problema **??** pentru detalii. Am folosit forma complexă pentru uşurinţa scrierii. Precizăm că funcţiile continue $f : X \to Y$ şi $g : X \to Y$ sunt homotope dacă există o funcţie continuă $H : X \times [0,1] \to Y$ astfel încât $H(x,0) = f(x)$ şi $H(x,1) = g(x)$ pe X. In etapa a doua, se arată că, mulţimea U nu este contractibilă, adică aplicaţia identică pe U nu este homotopă cu o funcţie constantă pe U. Vezi Problema **??**. Demonstraţia se încheie observând că, dacă f nu are puncte fixe atunci funcţia definită prin

$$H(x,t) = \begin{cases} r(x - 2tf(x)) & \text{dacă } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ r((2-2t)x - f((2-2t)x)) & \text{dacă } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

unde $r(x) = x/\|x\|$ pentru $x \neq 0$, arată că funcţia identică pe U este homotopă cu funcţia constantă $r(-f(0))$ ceea ce contrazice faptul că U nu este contractibilă. $\square$

Observaţia 3 Să remarcăm că dacă U nu este contractibilă atunci se poate demonstra uşor că nu este o retractă a lui B, adică are loc concluzia din Lema 1. Intradevăr, presupunând că există o funcţie continuă $f : B \to U$ astfel încât $f(x) = x$ pentru orice $x \in U$, funcţia $H : U \times [0,1] \to U$ definită prin $H(x,t) = r((1-t)x)$ face U contractibilă, adică $H(x,0) = x$ pentru $x \in U$ şi $H(x,1) = 0$ pentru $x \in U$.

Rezultatul care urmează, cunoscut în literatură sub numele de Teorema Perron-Frobenius, este o aplicaţie importantă a Teoremei lui Brouwer. Teorema pe care o vom demonstra în cele ce urmează afirmă că orice matrice pătratică ale cărei elemente sunt nenegative are cel puţin un vector propriu cu componente nenegative corespunzător unei valori proprii nenegative. Precizăm că x_i notează componenta de rang i a vectorului coloană $x \in \mathbf{R}^n$.

Teorema 7 *Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătratică de tipul $n \times n$ cu elemente nenegative. Atunci există $\lambda \geq 0$ şi un vector nenul $x \in \mathbf{R}^n$, cu $x_i \geq 0$ pentru $i = 1, 2, \cdots, n$, astfel încât $Ax = \lambda x$.*

Demonstraţie. Definim mulţimea nevidă convexă şi compactă

$$K = \left\{ x \in \mathbf{R}^n ; x_i \geq 0 \forall i = 1, 2, \cdots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Dacă există $x_0 \in K$ astfel încât $Ax_0 = 0$, atunci x_0 şi $\lambda = 0$ rezolvă problema.

Considerăm acum cazul în care pentru orice $x \in K$ avem $Ax \neq 0$. Cum A este cu elemente nenegative, rezultă că funcţia $g : K \to \mathbf{R}$, definită prin

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i$$

ia numai valori pozitive. Ca atare, putem defini funcţia continuă $F : K|to\mathbf{R}^n$ prin

$$F(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} (Ax)_i} Ax.$$

Aceasta aplică mulţimea K în ea însăşi. Pentru aceasta, este suficient să observăm că $(Ax)_i \geq 0$ pentru orice $x \in K$ şi că

$$\sum_{i=1}^{n} (F(x))_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} (Ax)_k} \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i = 1.$$

Din Teorema de punct fix a lui Brouwer, deducem că există $x \in K$ cu $F(x) = x$. Ultima egalitate se poate rescrie echivalent sub forma $Ax = \lambda x$ cu $\lambda = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i$, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Incheiem acest paragraf cu menţiunea că Luitzen Egbertus Jan Brouwer a publicat Teorema 4 în anul 1909 în cazul tridimensional, Jacques Hadamard a demonstrat-o în anul următor în cazul p-dimensional dar pentru funcţii diferenţiabile. De altfel, Hadamard o numeşte deja Teorema de punct fix a lui Brouwer, ceea ce sugerează că rezultatul era deja faimos. Prima demonstraţie pentru cazul general a fost dată de Brouwer în 1912 [24]. Demonstraţia lui Brouwer se bazează pe teoria gradului topologic, introdusă de el ca o alternativă la teoria indexului, a lui Kronecker, utilizată de altfel de Henri Poincaré la demonstrarea teoremei p-dimensionale a valorilor intermediare. Faptul că Lema 1 este echivalentă cu Teorema lui Brouwer a fost observat de Karol Borsuk în 1931. Este interesant de precizat că există un alt rezultat echivalent cu Teorema lui Brouwer, şi foarte apropiat de Lema lui Borsuk, care fusese dat de Piers Bohl în 1904 şi demonstrat de el pentru funcţii diferenţiabile:

Nu există o funcţie continuă $f : C \to \mathbf{R}^p \setminus \{0\}$ *cu proprietatea că* $f(x) = x$ *pentru* x *din frontiera lui* C,

unde C este cubul din $\mathbf{R}^p$, adică mulţimea definită în Teorema 5.

Abia în 1930 rezultatul a fost extins de Juliusz Schauder la cazul spaţiilor infinit dimensionale. In 1937 John von Neumann iar în 1941 Shizuo Kakutani extind rezultatul la cazul multifuncţiilor. In secţiunile următoare vom prezenta aceste extinderi. Să mai remarcăm că Lema 1 are multe demonstraţii, cea prezentată aici aparţine lui Konrad Gröger şi a fost publicată în 1981 [41]. In sfârşit, demonstraţia prezentată pentru cazul 2-dimensional (Teorema 6) a fost dată de Robert F. Brown în 1974 [24].

3 Teorema de punct fix a lui Schauder

In spaţii infinit dimensionale, Teorema de punct fix a lui Brouwer nu are loc

Teorema 8 (Schauder) *Fie* K *o mulţime convexă şi compactă într-un spaţiu normat* X *şi* $f : K \to K$ *o funcţie continuă. Atunci există* $x \in K$ *astfel încât* $f(x) = x$.

Teorema de punct fix a lui Schauder, enunţată mai sus, este o extensie la spaţii normate a Teoremei lui Brouwer. Ea a fost demonstrată în 1927 de Juliusz Schauder pentru spaţii Banach cu bază Schauder. Această ipoteză a fost eliminată în 1930 [84]. Trebuie menţionat că într-o lucrare publicată în 1922 [17], George Birkhoff şi Oliver Kellogg extinseseră Teorema de punct fix a lui Brouwer pentru funcţii continue pe mulţimi compacte şi convexe din spaţii de funcţii de tipul $C^k([a,b])$ sau $L^2(a,b)$. Ei au aplicat teorema lor de punct fix la studiul unor probleme la limită neliniare. De altfel, Schauder a dat şi el aplicaţii la problema Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale ordinare şi pentru anumite probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale.

In literatură, Teorema lui Schauder apare şi în alte variante. Amintim că o funcţie $f: M \to X$ este compactă dacă este continuă şi mulţimea $f(E)$ este relativ compactă pentru orice mulţime mărginită $E \subset M$. Dacă f este continuă şi $f(M)$ este relativ compactă atunci f este compactă.

Teorema 9 *Fie M o mulţime închisă mărginită şi convexă a spaţiului normat X şi $f: M \to M$ o funcţie compactă. Atunci există $x \in M$ astfel încât $f(x) = x$.*

Teorema 10 *Fie A o mulţime convexă şi închisă în spaţiul normat X şi f o funcţie continuă de la A la o submulţime compactă a lui A. Atunci există $x \in A$ astfel încât $f(x) = x$.*

Să arătăm că cele trei variante prezentate mai sus sunt echivalente. Presupunem că este adevărată Teorema 8 şi fie A şi f ca în Teorema 10. Avem $f(A) \subset A_1$ (compactă), $A_1 \subset A$. Deci $f(A) \subset \overline{\text{conv}}(A_1) \subset A$. Deoarece A_1 este compactă, rezultă că $\overline{\text{conv}}(A_1)$ este compactă [49, p.84]. Aplicând Teorema 8 pentru $K = \overline{\text{conv}}(A_1)$, obţinem concluzia. Presupunem acum că este adevărată Teorema 10 şi demonstrăm Teorema 9. Fie M şi f ca în Teorema 9. Funcţia f fiind compactă şi M fiind mărginită, rezultă că $\overline{f(M)}$ este compactă. Deoarece M este închisă, $\overline{f(A)} \subset M$. Rezultă deci concluzia Teoremei 9. In sfârşit, dacă presupunem că este adevărată Teorema 9, Teorema 8 rezultă uşor având în vedere că mulţimile compacte sunt inchise şi mărginite, iar funcţiile continue definite pe mulţimi compacte sunt compacte.

Demonstraţia Teoremei 8 Mulţimea K fiind compactă, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ există o $1/n$-reţea finită $\{S(a; 1/n); a \in A_n\}$, unde A_n este finită, şi câte o funcţie continuă $\varphi_n : K \to X$, astfel încât

$$\|\varphi_n(x) - x\| < 1/n \; \forall x \in K.$$

Pentru a demonstra acest fapt, definim $\varphi : K \to X$ prin

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{a \in A} \psi_a(x) a}{\sum_{a \in A} \psi_a(x)}$$

unde $\psi_a(x) = 0$ dacă $\|x - a\| \geq 1/n$ şi $\psi_a(x) = 1/n - \|x - a\|$ dacă $\|x - a\| \leq 1/n$. Să arătăm că φ este continuă şi

$$\|\varphi(x) - x\| < 1/n$$

pentru orice $x \in K$. Intr-adevăr, să observăm mai întâi că pentru orice $x \in A$ avem

$$\psi_a(x) \geq 0$$

iar pentru orice $x \in K$ avem

$$\sum_{a \in A} \psi_a(x) > 0.$$

Continuitatea lui φ rezultă din faptul că fiecare ψ_a este continuă. Dacă $x \in K$ atunci

$$\varphi(x) - x = \frac{\sum_{a \in A} \psi_a(x)(a - x)}{\sum_{a \in A} \psi_a(x)}.$$

Dacă $\psi_a(x) > 0$ atunci $\|x - a\| < 1/n$. Prin urmare

$$\|\varphi(x) - x\| \leq \frac{\sum_{a \in A} \psi_a(x) \|a - x\|}{\sum_{a \in A} \psi_a(x)} < 1/n.$$

Este clar că

$$\varphi_n(K) \subset \operatorname{conv}(K) = K.$$

Deci $f_n = \varphi_n \circ f$ are proprietatea că $f_n(K) \subset K$. Avem în plus

$$\|f_n(x) - f(x)\| < 1/n, \quad \forall x \in K.$$

Fie acum X_n înfăşurătoarea liniară a mulţimilor A_n şi fie $\Omega_n = K \cap X_n$. Spaţiul liniar X_n este finit dimensional, Ω_n este convexă şi compactă în X_n iar $f_n : \Omega_n \to \Omega_n$ este continuă. Din Corolarul 2 rezultă că există $x_n \in \Omega_n$ astfel încât $f_n(x_n) = x_n$. Deoarece $(f(x_n))$ este un şir din mulţimea compactă K, există un subşir convergent $(f(x_{k_n}))$ la $x_0 \in K$. Ţinând cont de faptul că

$$f_{k_n}(x_{k_n}) = x_{k_n},$$

obţinem

$$\|x_{k_n} - x_0\| \leq \|f_{k_n}(x_{k_n}) - f(x_{k_n})\| + \|f(x_{k_n}) - x_0\| \leq 1/k_n + \|f(x_{k_n}) - x_0\|,$$

ceea ce arată că $x_{k_n} \to x_0$. Deoarece f este continuă, $f(x_0) = \lim f(x_{k_n}) = x_0$, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Observaţia 4 In demonstraţia de mai sus, în locul funcţiei φ_n se poate considera funcţia de proiecţie $P_n : X \to \Omega_n$. Problema care apare este că această funcţie este bine definită şi continuă în cazul spaţiilor strict normate. Amintim că un spaţiu normat este strict normat dacă $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ şi $x \neq 0$ implică $y = tx$ pentru un $t \geq 0$. Deoarece Ω_n este compactă, există elemente $\omega_0 \in \Omega_n$ astfel încât

$$\|x - \omega_0\| = \inf\{\|x - \omega\|;\ \omega \in \Omega_n\}.$$

Având în vedere că X este strict normat şi Ω_n este convexă, rezultă unicitatea lui ω_0. Dar pentru orice spaţiu normat separabil X, există o normă echivalentă faţă de care X este strict normat. In sfârşit, condiţia de separabilitate nu deranjează în problema noastră pentru că se poate lucra cu înfăşurătoarea liniară a mulţimii K în locul lui X, înfăşurătoare care este spaţiu separabil deoarece K este compactă.

Să prezentăm în continuare câteva exemple tipice de operatori compacţi în spaţii Banach infinit dimensionale. Este uşor de văzut că în spaţii finit dimensionale mulţimea operatorilor compacţi coincide cu cea a operatorilor continui. Rezultatul central folosit în continuare este Teorema Arzelà-Ascoli.

Teorema 11 (Arzelà-Ascoli) *O submulţime K în $C([\,a,b\,];X)$, unde X este spaţiu Banach, este relativ compactă dacă şi numai dacă mulţimea K este echicontinuă pe $[\,a,b\,]$ şi pentru fiecare $t \in [a,b]$ secţiunea lui K în t, adică mulţimea $K(t) = \{f(t);\ f \in K\}$, este relativ compactă în X. Rezultatul este adevărat dacă mulţimea $K(t)$ este relativ compactă pentru t într-o mulţime densă din $[a,b]$.*

In 1889 Cesare Arzelà [3] a demonstrat necesitatea condiţiei de compactitate iar în 1882-1883 Guido Ascoli [4] a demonstrat suficienţa, ambele în $C[a,b] = C([\,a,b\,];\mathbf{R})$. Rezultatul are loc şi dacă în loc de $[a,b]$ avem un spaţiu compact. In cazul $X = \mathbf{R}$, condiţia ca mulţimile $K(t)$ să fie relativ compacte este echivalentă cu mărginirea în $C[a,b]$. Demonstraţia pentru cazul când X este spaţiu Banach este esenţial aceeaşi ca în cazul în care $X = \mathbf{R}$. O submulţime S în $C(K)$ este *echicontinuă* dacă pentru orice $x \in K$ şi orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate $U_{x,\varepsilon}$ a lui x astfel încât

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

pentru orice $f \in S$ şi $y \in U_{x,\varepsilon}$.

Exemplul 1 Fie funcţia continuă $K : [a,b] \times [a,b] \times [-R,R] \to \mathbf{R}$, unde $a,b \in \mathbf{R}$ şi $R > 0$. Fie $M = \{x \in C[a,b]; \|x\| \leq R\}$ unde pe $C[a,b]$ considerăm norma uzuală $\|x\| = \sup\{|x(t)|; t \in [a,b]\}$. Operatorii $T, S : M \to C[a,b]$ definiţi prin

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(t,s,x(s))ds, \quad (Sx)(t) = \int_a^t K(t,s,x(s))ds$$

sunt compacţi. Vom face demonstraţia pentru S.

Deoarece mulţimea $A = [a,b] \times [a,b] \times [-R,R]$ este compactă, K este mărginită şi uniform continuă pe A. Există $\alpha > 0$ cu $|K(t,s,x)| \leq \alpha$ pentru $(t,s,x) \in A$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$|K(t_1,s_1,x_1) - K(t_2,s_2,x_2)| < \varepsilon$$

pentru $(t_i,s_i,x_i) \in A$, $i = 1,2$, cu

$$|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2| + |x_1 - x_2| < \delta.$$

Deci

$$|(Sx)(t)| \leq \alpha(b-a)$$

pentru orice $t \in [a,b]$ şi

$$|(Sx)(t_1) - (Sx)(t_2)| \leq (b - a + \alpha)\varepsilon$$

pentru

$$|t_1 - t_2| \leq \min\{\delta, \varepsilon\}.$$

Folosim Teorema Arzelà-Ascoli şi deducem că mulţimea $S(M)$ este relativ compactă. Proprietatea de continuitate a operatorului S rezultă prin trecere la limită sub integrală.

Ca aplicaţie, considerăm ecuaţia integrală neliniară

$$x(t) = \gamma \int_a^b F(t,s,x(s))ds + \int_a^b G(t,s,x(s))ds. \tag{7}$$

Considerăm $A = \{(t,s,x); t,s \in [a,b], |x| \leq R\}$, $a,b,R > 0$, şi presupunem că funcţiile $F,G : A \to \mathbf{R}$ sunt continue, cu $|G(t,s,x)| \leq K|x|^p$ pe A, $p > 1$, $K > 0$. Atunci există $\gamma_0 > 0$ astfel încât ecuaţia (7) are soluţie continuă pe $[a,b]$ pentru fiecare γ cu $|\gamma| \leq \gamma_0$. Pentru demonstraţie, se alege r suficient de mic astfel încât, notând

$$M = \{x \in C[a,b]; \|x\| \leq R\},$$

să avem $T(M) \subset M$, unde T este operatorul definit prin membrul drept al ecuaţiei. Compactitatea lui T şi Teorema lui Schauder rezolvă problema.

Exemplul 2 Fie X spaţiu Banach, $(t_0,\xi) \in \mathbf{R} \times X$, $a,b > 0$, $c \in (0,a]$ şi

$$P = \{(t,x) \in \mathbf{R} \times X; |t - t_0| \leq a, \|x - \xi\| \leq b\}.$$

Presupunem că $f : P \to X$ este compactă şi $\|f(t,x)\| \leq k$ pentru $(t,x) \in P$. Operatorul $F : M \to X$, unde

$$M = \{x \in C([t_0 - c, t_0 + c]; X); \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \|x(t) - \xi\| \leq b\},$$

definit prin

$$(Fx)(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

este compact. Intr-adevăr, mulţimea $F(M)$ este relativ compactă:

$$\|(Fx)(t) - (Fx)(s)\| \leq k|t - s|$$

pentru $t, s \in [t_0 - c, t_0 + c]$ iar valorile sunt în mulţimea compactă

$$\xi + (t - t_0)\overline{\text{conv}}\{f(s, x(s)); s \in [t_0 - c, t_0 + c]\}.$$

Continuitatea este imediată.

O aplicaţie importantă a acestui fapt este *Teorema lui Peano în spaţii Banach.* Se consideră ecuaţia diferenţială în spaţiul Banach X,

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad x(t_0) = \xi. \tag{8}$$

Rezultatul clasic al lui Peano afirmă că, dacă $X = \mathbf{R}^n$ şi f este continuă, atunci ecuaţia (8) are cel puţin o soluţie. In spaţii infinit dimensionale rezultatul nu mai este adevărat fără condiţii suplimentare asupra lui f. O astfel de condiţie este ca f să fie compactă.

Teorema 12 *In condiţiile date în Exemplul* 2, *luăm* $c = \min\{a, b/k\}$. *Atunci ecuaţia diferenţială* (8) *are soluţie pe* $[t_0 - c, t_0 + c]$.

Demonstraţie. Se aplică Teorema de punct fix a lui Schauder operatorului F definit mai sus. Se constată cu uşurinţă că $F(M) \subset M$. $\square$

Exemplul 3 Fie X şi U spaţii Banach, $S(t)$, $t \geq 0$, un semigrup de clasă C_0 pe X şi $B \in L(U, X)$. Fixăm $T > 0$, notăm $I = [0, T]$ şi pentru $p > 1$ definim operatorii $F_T : L^p(I; X) \to X$ şi $G_T : L^p(I; U) \to X$ prin

$$F_T x = \int_0^T S(T - s)x(s)ds, \quad G_T u = \int_0^T S(T - s)Bu(s)ds.$$

In teorema care urmează dăm condiţii care asigură compactitatea operatorilor F_T şi G_T.

Teorema 13 *(i) Dacă $S(t)$ este operator compact pentru fiecare $t > 0$ atunci operatorul F_T este compact.*

(ii) Dacă B este compact atunci operatorul G_T este compact.

Demonstraţie. Vom face demonstraţia pentru $p = 2$, cazul general se adaptează uşor. Să demonstrăm (i). Este suficient să demonstrăm că mulţimea $F_T(P)$ este relativ compactă în X unde

$$P = \{x \in L^2(I; X); \|x\| \le \alpha\}.$$

Notăm $K = F_T(P)$,

$$K(t) = \left\{ \int_0^t S(t-s)x(s)ds;\ x \in P \right\}, \quad 0 < t \le T$$

şi observăm că există $\gamma > 0$ astfel încât $\|S(t)\| \le \gamma$ pentru orice $t \in I$. Pentru $0 < \varepsilon < T$ definim

$$K_\varepsilon = S(\varepsilon)K(T-\varepsilon).$$

Deoarece $K(T-\varepsilon)$ este mărginită în X şi $S(\varepsilon)$ este operator compact, urmează că mulţimea K_ε este relativ compactă. Acest fapt, împreună cu inegalitatea

$$\|F_T x - \int_0^{T-\varepsilon} S(T-s)x(s)ds\| \le \gamma\alpha\sqrt{\varepsilon}$$

arată că mulţimea K este total mărginită, deci este relativ compactă în X.

Să demonstrăm acum (ii). Pentru aceasta folosim un rezultat al lui Juliusz Schauder din 1930:

Un operator liniar continuu de la un spaţiu Banach la un spaţiu Banach este compact dacă şi numai dacă adjunctul lui este compact.

Se vede uşor că

$$G_T^* : X^* \to L^2(I; U^*) \subset (L^2(I; U))^*$$

este dat de $G_T^*(y) = B^* S(\cdot)^* y$ pentru orice $y \in X^*$. Atragem atenţia că nu identificăm $L^2(I; U^*)$ cu $(L^2(I; U))^*$. Idetificarea este posibilă în condiţii suplimentare pentru X (de exemplu, reflexivitatea). De asemenea, $S(t)^*$ nu este numaidecât semigrup de clasă C_0. Totuşi, funcţia $t \mapsto \|B^* S(t)^* y\|$ este măsurabilă şi se verifică o inegalitate de tipul $\|S(t)^*\| \le M\exp(\omega t)$, deci operatorul G^* este bine definit. Cititorul poate găsi informaţii despre semigrupul adjunct în [95].

Să arătăm deci că operatorul G_T^* de la X^* la $L^2(I; U^*)$, definit mai sus, este compact. Observăm întâi că funcţia $t \mapsto B^* S(t)^*$ (cu valori în $L(X^*; U^*)$) este continuă în orice punct $t \ge 0$. Intr-adevăr, avem

$$\|B^* S(t)^* - B^* S(s)^*\| = \|(S(t) - S(s))B\|$$

care tinde la zero pentru $t \to s$ pentru că

$$\lim_{t \to s}(S(t) - S(s))x = 0$$

pentru orice $x \in X$, deci pe compacte convergenţa este uniformă (în particular pe $\{Bu : \|u\| \leq 1\}$). Arătăm acum că mulţimea $J = \{G_T^* y; y \in X^*, \|y\| \leq 1\}$ este relativ compactă în $L^2(I; U^*)$, ceea ce este echivalent cu faptul că are o ε-reţea finită pentru orice $\varepsilon > 0$. Din continuitatea funcţiei $t \mapsto B^* S(t)^*$, există o divizare $\Delta_1, \cdots, \Delta_n$ a intervalului $[0, T]$ astfel încât

$$\|B^* S(t)^* - B^* S(s)^*\| < \varepsilon / 2\sqrt{T}$$

pentru orice $t, s \in \Delta_i$, $i = 1, \cdots, n$. De aici se obţine că mulţimea

$$J_\varepsilon = \{j(y) = \sum_{i=1}^{n} B^* S(T - t_i)^* y \chi_{\Delta_i}; \|y\| \leq 1, y \in X^*\}$$

este o $\varepsilon/2$-reţea pentru J, unde $t_i \in \Delta_i$ sunt puncte fixate. Rămâne să găsim o $\varepsilon/2$-reţea finită pentru J_ε. Pentru aceasta, observăm că aplicaţia

$$y \mapsto \alpha(y) = (B^* S(T - t_1)^* y, \cdots, B^* S(T - t_n)^* y)$$

de la X^* în spaţiul $U^* \times \cdots \times U^*$ este compactă. Deci există o $\varepsilon/2\sqrt{T}$-reţea finită a mulţimii $\{\alpha(y); \|y\| \leq 1\}$, fie aceasta $\alpha(y_1), \cdots, \alpha(y_m)$. Pentru orice $y \in X^*$ cu $\|y\| \leq 1$ există k astfel încât

$$\|\alpha(y) - \alpha(y_k)\| < \varepsilon / 2\sqrt{T},$$

ceea ce implică

$$\|j(y) - j(y_k)\|_{L^2(I;U^*)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta_i} \|B^* S(T - t_i)^* y - B^* S(T - t_i)^* y_k\|^2 dt \right)^{1/2} < \varepsilon/2.$$

Prin urmare, $\{j(y_i); i = 1, \cdots, m\}$ este o ε-reţea finită pentru J. □

Observaţia 5 Se poate demonstra un rezultat mai general. Pentru $p > 1$, considerăm operatorii $F : L^p(I; X) \to C(I; X)$ şi $G : L^p(I; U) \to C(I; X)$ definiţi prin

$$(Fx)(t) = \int_0^t S(t - s)x(s)ds, \quad (Gu)(t) = \int_0^t S(t - s)Bu(s)ds.$$

Dacă $S(t)$ este compact pentru orice $t > 0$ atunci F este compact. Dacă B este compact atunci G este compact. Nu vom intra în detalii, doar precizăm că, din cele arătate mai sus, mulţimile $\{(Fx)(t);\, x \in P\}$ sunt relativ compacte în X pentru orice $t \in [0,T]$. Pentru a încheia demonstraţia, utilizăm Teorema Arzelà-Ascoli, dar mai e nevoie de verificarea proprietăţii de echicontinuitate. Cititorul poate obţine detalii din [95, Teorema 6.2.1]. La fel se procedează şi pentru G. Vezi şi Observaţia 10.

Observaţia 6 O proprietate remarcabilă a operatorilor compacţi $V \in L(X,Y)$, unde X şi Y sunt spaţii Banach, iar X este infinit dimensional, este că nu sunt surjectivi. Intr-adevăr, dacă V este surjectiv atunci pe baza principiului aplicaţiilor deschise, Teorema **??**, există $\delta > 0$ astfel încât $B(0,1) \subset VB(0,\delta)$. Compactitatea lui V implică compactitatea mulţimei $B(0,1)$, ceea ce este imposibil dacă X este infinit dimensional. Acest fapt are implicaţii la controlabilitatea exactă a sistemelor liniare infinit dimensionale. Vezi Observaţia **??**. O altă implicaţie este aceea că operatorul F_T nu este compact pentru $p = 1$, deoarece este surjectiv pentru orice semigrup $S(t)$. Intr-adevăr, avem

$$\sup_{t\in[0,T]} \|S(t)^*y\| \geq \|y\| \quad \forall y \in X^*,$$

ceea ce exprimă faptul că adjunctul lui $F_T : L^1(I;X) \to X$ are invers mărginit pe imaginea sa, deci F_T este surjectiv. Vezi şi Observaţia **??**.

O altă aplicaţie a Teoremei de punct fix a lui Schauder este următorul rezultat, numit Principiul Leray-Schauder.

Teorema 14 *Fie X un spaţiu Banach şi $T : X \to X$ un operator compact. Presupunem că are loc estimarea a priori: există $r > 0$ astfel încât dacă $x = tTx$ cu $t \in (0,1)$ atunci $\|x\| \leq r$. In aceste condiţii, T are punct fix.*

Demonstraţie. Definim funcţia $f : B(0,2r) \to B(0,2r)$ prin

$$f(x) = \begin{cases} Tx & \text{dacă} \quad \|Tx\| \leq 2r \\ \frac{2r\,Tx}{\|Tx\|} & \text{dacă} \quad \|Tx\| > 2r. \end{cases}$$

Arătăm că funcţia f este compactă. Este clar că putem aplica apoi Teorema 9 pentru a deduce că există $x \in B(0,2r)$ astfel încât $f(x) = x$. Intr-adevăr, dacă $\|Tx\| \leq 2r$, atunci $Tx = x$. Cazul $\|Tx\| > 2r$ este imposibil deoarece ar rezulta $f(x) = tTx = x$ cu $t = 2r/\|Tx\|$, ceea ce conduce la $\|x\| \leq r$, din ipoteză, şi la $\|x\| = \|f(x)\| = 2r$, din definiţia lui f. Să arătăm aşadar că funcţia f este compactă. Este evident continuă. Fie $(x_n) \in B(0, 2r)$. Dacă există un subşir (y_n) pentru care $\|Ty_n\| \leq 2r$ pentru orice n, din compactitatea lui T va exista un subşir (z_n) pe care T, şi deci f, va converge. Dacă există un subşir (y_n) pentru care $\|Ty_n\| > 2r$ pentru orice n, atunci există un subşir (z_n) pentru care $1/\|T(z_n)\| \to p$ şi $T(z_n) \to y$. Prin urmare, $f(z_n) \to 2rpy$. □

Să observăm ca nu se presupune că ecuaţia $x = tTx$ are o soluţie pentru $0 < t < 1$. Să observăm, de asemenea, că estimarea a priori este satisfăcută în cazul în care mulţimea $T(X)$ este mărginită. Teorema de mai sus a fost demonstrată în 1934 [58] de Jean Leray şi Juliusz Schauder. Ea corespunde următorului principiu: *Estimări a priori conduc la existenţă.* Ca aplicaţie, în [58] se dau rezultate de existenţă pentru problema Dirichlet

$$A_{11}u_{xx} + 2A_{12}u_{xy} + A_{22}u_{yy} = 0 \text{ pe } D, \quad u = g \text{ pe } \mathrm{Fr}(D),$$

unde A_{ij} sunt funcţii de forma $A_{ij} = A_{ij}(x, y, u, u_x, u_y)$. Pentru a aplica o teoremă de punct fix, se consideră $A_{ij} = A_{ij}(x, y, z, z_x, z_y)$ cu z fixat şi se obţine o ecuaţie liniară în u cu soluţia $u = Tz$. Un punct fix pentru T este soluţie a problemei neliniare. Pentru a aplica Teorema 14 se introduce parametrul $t \in (0, 1)$ prin condiţia la frontieră $u = tg$ pe $\mathrm{Fr}(D)$, astfel că problema iniţială se reduce la rezolvarea ecuaţiei $u = tTu$ pentru $t = 1$.

Incheiem această secţiune cu

Teorema 15 (Ky Fan) *Fie K o mulţime convexă şi compactă în spaţiul Banach X şi $f : X \times X \to \mathbf{R}$ o funcţie care satisface condiţiile*

(*i*) *Pentru orice $y \in K$ funcţia $f(\cdot, y)$ este inferior semicontinuă;*

(*ii*) *Pentru orice $x \in K$ funcţia $f(x, \cdot)$ este concavă;*

(*iii*) *Pentru orice $y \in K$ avem $f(y, y) \leq 0$.*

Atunci există $u \in K$ astfel încât

$$f(u, y) \leq 0, \quad \forall y \in K.$$

Demonstraţie. Prin reducere la absurd, presupunem că pentru orice $x \in K$ există $y \in K$ astfel încât $f(x, y) > 0$. Mulţimea K se poate acoperi cu mulţimile deschise

$$D_y = \{x \in K; f(x, y) > 0\}.$$

Deoarece mulţimea K este compactă, ea se poate acoperi cu un număr finit $D_{y_i}, i = 1, \cdots, n$. Fie $\{p_i, i = 1, \cdots, n\}$ o partiţie a unităţii subordonate acestei acoperiri şi fie funcţia $g : K \to X$ definită prin

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_i.$$

Aplicând Teorema 8, există $v \in K$ astfel încât $g(v) = v$. Din (ii) deducem

$$f(v, v) = f(v, \sum_{i=1}^{n} p_i(v) y_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i(v) f(v, y_i).$$

Este clar că dacă i este astfel încât $p_i(v) > 0$ atunci $v \in D_{y_i}$ şi deci $f(v, y_i) > 0$. Se contrazice astfel (iii). □

Observaţia 7 Rezultatul prezentat mai sus, demonstrat în [56] (1972) şi cunoscut în literatură sub numele *Inegalitatea lui Ky Fan.* poate fi interpretat ca un rezultat de existenţă pentru o inegalitate variaţională (generalizată). Vezi şi Teorema **??** unde Inegalitatea lui Ky Fan se utilizează pentru demonstraţie. După cum s-a văzut, demonstraţia se bazează pe Teorema de punct fix a lui Schauder. Este interesant că în spaţii Hilbert se poate demonstra uşor şi reciproca: Inegalitatea lui Ky Fan implică Teorema 8. Intr-adevăr, dacă $h : K \to K$ este continuă atunci funcţia definită prin $f(x, y) = \langle h(x) - x, y - x\rangle$ satisface ipotezele din Inegalitatea lui Ky Fan. Rezultă că există $\overline{x} \in K$ astfel încât $f(\overline{x}, y) \leq 0$, pentru orice $y \in K$. Se deduce de aici că $\overline{x}$ este punct fix pentru h. Precizăm că se poate obţine un rezultat aparent mai tare si anume:

In condiţiile (i) şi (ii) avem

$$\min_{x\in X} \sup_{y\in X} f(x, y) \leq \sup_{x\in X} f(x, x).$$

Să prezentăm o aplicaţie simplă în matematica economică. Considerăm un sistem economic cu n producători, $P_1, \cdots, P_n$. Producătorul P_i fabrică un număr a_i de produse G_i cu preţul p_i pentru fiecare. Fie $D_{ij}(p)$ cererea de către producătorul P_i pentru produsul G_j. Dorim să găsim un sistem rezonabil de preţuri $p = (p_1, \cdots, p_n)$, în ipoteza

$$p_i a_i = \sum_{j=1}^{n} p_j D_{ij}(p), \quad D_{ii}(p) = 0, \;\; i = 1, \cdots, n.$$

Condiţia de mai sus spune că producătorii folosesc toate veniturile ca să obţină alte produse. Avem următorul rezultat:

Există un sistem de preţuri $\overline{p} > 0$ astfel încât

$$a_j \geq \sum_{i=1}^{n} D_{ij}(\overline{p}) \quad \forall j = 1, \cdots, n.$$

Interpretarea este următoarea: există un sistem de preţuri pentru care cererea este mai mică sau egală cu oferta. Pentru demonstraţie, se consideră

$$X = \{p \in \mathbf{R}^n;\ p \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

$$F_j(p) = \sum_{i=1}^{n} D_{ij}(p), \quad f(p,q) = \langle p, F(q)\rangle - \langle p, q\rangle.$$

Ipoteza pusă asigură că $f(p,p) = 0$ pentru orice $p \in X$, deci există $\overline{p} \in X$ cu $f(\overline{p}, q) \leq 0$ pentru orice $q \in X$. Acest fapt conduce la $F(\overline{p}) \leq a$, ceea ce trebuia demonstrat.

4 Teoreme de punct fix pentru multifuncţii

Incepem această secţiune cu o generalizare a Teoremei de punct fix a lui Banach. Amintim că

$$\delta(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{x\in B} d(x,A)\}$$

defineşte metrica Pompeiu-Hausdorff.

Teorema 16 *Fie $F : X \rightsquigarrow X$ o multifuncţie cu valori nevide şi închise pe spaţiul metric complet (X, ρ). Presupunem că există $0 < k < 1$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$ avem*

$$\delta(F(x), F(y)) \leq k\rho(x,y).$$

Atunci F are cel puţin un punct fix $u \in X$ (adică $u \in F(u)$).

Demonstraţie. Alegem un r astfel încât $k < r < 1$, luăm $x_0 \in X$ şi apoi alegem $x_1 \in F(x_0)$ cu $\rho(x_0, x_1) > 0$. Avem

$$d(x_1, F(x_1)) \leq \delta(F(x_0), F(x_1)) < r\rho(x_0, x_1),$$

deci există $x_2 \in F(x_1)$ cu $\rho(x_2, x_1) < r\rho(x_0, x_1)$. Repetând procedeul, determinăm un şir (x_n) astfel încât

$$x_{n+1} \in F(x_n), \quad \rho(x_n, x_{n+1}) < r^n\rho(x_0, x_1), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

De aici, prin procedeul standard utilizat în demonstraţia Teoremei 1, obţinem că şirul (x_n) este convergent la un element $u \in X$. Să arătăm că acesta este punctul fix căutat. Intr-adevăr, aceasta rezultă din

$$d(x_{n+1}, F(u)) \leq \delta(F(x_n), F(u)) \leq k\rho(x_n, u) \to 0$$

şi din faptul că mulţimea $F(u)$ este închisă. □

Teorema de mai sus a fost demonstrată de Sam B. Nadler Jr. în 1969 [70]. Este interesant că, spre deosebire de cazul funcţiilor, punctul fix poate sa nu fie unic. Cazul banal este când F este constantă, dar Jean Saint Raymond a demonstrat în 1994 [82] următorul rezultat:

Fie C este o submulţime convexă şi închisă a unui spaţiu Banach X şi contracţia $F : C \rightsquigarrow C$ cu valori închise. Dacă x_0 este punct fix şi $F(x_0)$ are cel puţin două elemente, atunci există un punct fix al lui F diferit de x_0.

Continuăm cu Teorema de punct fix a lui Kakutani. Inainte de a da această importantă teoremă, să amintim câteva lucruri despre şirurile generalizate. Pentru detalii se poate consulta [79, p.225]. Dacă pe I este definită o preordine (relaţie reflexivă şi tranzitivă) atunci, spunem că I este dirijată dacă pentru $i_1, i_2 \in I$ există $i_3 \in I$ încât $i_1 \preceq i_3$ şi $i_2 \preceq i_3$. Un *şir generalizat* în X este o funcţie de la o mulţime dirijată de indici la X. Se notează $(x_i)_{i\in I}$ sau doar (x_i). Şirurile generalizate se mai numesc şiruri Moore-Smith după numele celor care le-au introdus în 1922: Eliakim H. Moore şi Henry L. Smith [69]. Teoria generală a limitelor dezvoltată de Moore şi Smith a fost făcută independent şi de Mauro Picone într-o carte care a apărut anul următor [75]. Termenul englezesc este "net" utilizat pentru prima dată de John L. Kelley în 1950. Un element $x_0 \in X$ este punct limită pentru şirul (x_i), dacă pentru fiecare vecinătate V a lui x_0 şi pentru fiecare $i \in I$ există $j \in I$ cu $i \preceq j$ astfel încât $x_j \in V$. Amintim următorul rezultat:

O mulţime K este compactă dacă şi numai dacă fiecare şir generalizat din K are un punct limită în K.

Teorema 17 *Fie K o mulţime convexă şi compactă dintr-un spaţiu local convex separat X. Fie $F : K \rightsquigarrow K$ o multifuncţie superior semicontinuă cu valori nevide închise şi convexe. Atunci există $x_0 \in K$ astfel încât $x_0 \in F(x_0)$.*

Demonstraţie. Fie $\{V_i; i \in I\}$ un sistem fundamental de vecinătăţi deschise convexe echilibrate şi absorbante pentru originea lui X. Pentru i fixat, deoarece K este compactă, există $J(i)$, mulţime finită, şi $x_{ij}, j \in J(i)$ astfel încât familia $\{x_{ij} + V_i; j \in J(i)\}$ este o acoperire deschisă a lui K. Fie $\{p_{ij}; j \in J(i)\}$ o partiţie a unităţii subordonate ei, şi fie funcţia $f_i : K \to X$ definită prin

$$f_i(x) = \sum_{j \in J(i)} p_{ij}(x) y_{ij},$$

unde y_{ij} este un element oarecare în $F(x_{ij})$. Mulţimea

$$K_i = \operatorname{conv}\{y_{ij}; j \in J(i)\}$$

este convexă şi compactă în spaţiul finit dimensional generat de $\{y_{ij}; j \in J(i)\}$, f_i este continuă, $f_i(K_i) \subset K_i$, şi deci, aplicând Teorema de punct fix a lui Brouwer, există $x_i \in K_i$ cu $f_i(x_i) = x_i$. Se obţine astfel un şir generalizat $(x_i)_{i \in I}$, unde pe I introducem ordinea $i \preceq j$ dacă $V_j \subset V_i$. Din proprietăţile sistemului de vecinătăţi, rezultă uşor că I este dirijată. Deoarece mulţimea K este compactă, şirul generalizat (x_i) are un punct limită $x_0 \in K$. Vom arăta că acesta este punctul fix căutat. Prin reducere la absurd, presupunem că $x_0 \notin F(x_0)$. Aplicăm o teoremă de separare a mulţimilor convexe prin hiperplane [79, p.111], [101, p.24] şi deducem că există o mulţime convexă şi deschisă W, cu $W \supset F(x_0)$ şi $x_0 \notin W$. Se aplică acum proprietatea de semicontinuitate a multifuncţiei F şi deducem că există V, vecinătate a lui x_0, astfel încât $F(x) \subset W$ pentru $x \in V$. Se poate evident lua V şi cu proprietatea

$$V \cap W = \emptyset.$$

Mai departe, $V - x_0$ este vecinătate a originii şi deci există $i \in I$ astfel încât

$$V_i + V_i \subset V - x_0.$$

Folosim acum proprietatea că x_0 este punct limită pentru şirul (x_i) şi deducem că există $j \succeq i$ (prin urmare $V_j \subset V_i$) cu $x_j \in x_0 + V_i$. Deci

$$x_j + V_j \subset x_0 + V_i + V_i \subset V.$$

Reţinem deci că există $j \in I$ cu $x_j + V_j \subset V$. Vom arăta că $x_j \in W$, ceea ce este fals. Intr-adevăr, avem

$$x_j = f_j(x_j) = \sum_{\alpha \in J(j)} f_{j\alpha}(x_j) y_{j\alpha} \in W$$

deoarece, dacă $f_{j\alpha}(x_j) > 0$, atunci $x_j \in x_{j\alpha} + V_j$, deci $x_{j\alpha} \in V$ şi deci $y_{j\alpha} \in W$ iar W este convexă. Demonstraţia este terminată. $\square$

Shizuo Kakutani a demonstrat acest rezultat în 1941 în cazul finit dimensional [48]. Trebuie menţionat însă că o versiune echivalentă cu cea a lui Kakutani fusese obţinută în 1937 de John von Neumann [97] (vezi Problema **??**). In cazul spaţiilor local convexe ea a fost obţinută independent în 1952 de Ky Fan [55] şi Irving L. Glicksberg [38]. Demonstraţia lui Glicksberg se bazează pe rezultatul lui Kakutani. Menţionăm că Glicksberg pune ipoteza ca multifuncţia F să aibă grafic închis ceea ce, în condiţiile date, este echivalentă cu semicontinuitatea superioară (vezi Capitolul 2). Menţionăm de asemenea că Frederic Bohnenblust şi Samuel Karlin [19] (1950) demonstrează o variantă a acestei teoreme în spaţii Banach. Toate aceste rezultate sunt cazuri particulare ale unei teoreme obţinute de Edward G. Begle [14] în 1950, într-un cadru mai general, chiar neconvex.

Corolarul 3 (Bohnenblust şi Karlin) *Fie M o mulţime nevidă închisă şi convexă în spaţiul Banach X, $F : M \rightsquigarrow M$ o multifuncţie superior semicontinuă cu valori nevide închise şi convexe şi $F(M)$ relativ compactă. Atunci F are punct fix.*

Demonstraţia este imediată dacă aplicăm Teorema 17 mulţimii

$$K = \overline{\mathrm{conv}} F(M) \subset M.$$

In cazul când F este funcţie, se regăseşte Teorema de punct fix a lui Tikhonov publicată în 1935 [91].

Corolarul 4 (Tikhonov) *Fie $f : K \to K$ o funcţie continuă, unde K este nevidă compactă şi convexă într-un spaţiu local convex separat. Atunci f are punct fix.*

Când K este submulţime a unui spaţiu Banach, rezultatul aparţine lui Schauder, obţinut în 1930 [84] (vezi Teorema 9). Este interesant de menţionat că Schauder obţine în 1927 [83] o variantă apropiată de cazul local convex şi anume

Corolarul 5 *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi separabil, fie $M \subset X$ o mulţime nevidă convexă închisă şi mărginită şi fie $f : M \to M$ o funcţie slab secvenţial continuă. Atunci f are punct fix.*

Demonstraţia se poate face aplicând Corolarul 4 când X este înzestrat cu topologia slabă. In acest cadru M este slab compactă, topologia slabă pe M este metrizabilă iar f este continuă.

Prezentăm acum un rezultat, al lui Felix E. Browder din 1968 [23], util la demonstrarea existenţei soluţiilor unor inegalităţi variaţionale (Problema **??**) sau în probleme de minimax (Teorema **??**).

Teorema 18 (Browder) *Fie K o mulţime nevidă compactă şi convexă a unui spaţiu liniar topologic X şi fie $F : K \rightsquigarrow K$ o multifuncţie cu valori nevide şi convexe. Presupunem că $F^{-1}(y)$ este deschisă în K pentru orice $y \in K$. Atunci F are punct fix.*

Demonstraţie. Deoarece mulţimea K este compactă, există $y_1, y_2, \cdots, y_n$ puncte în K astfel încât familia $\{F^{-1}(y_i), i = 1, 2, \cdots, n\}$ este o acoperire pentru K. Fie $\{p_i; i = 1, 2, \cdots, n\}$ o partiţie a unităţii subordonate ei,

$$K_0 = \text{conv}\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$$

şi

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_i, \; x \in K_0.$$

Funcţia f este continuă, $f(K_0) \subset K_0$, deci putem aplica Teorema de punct fix a lui Brouwer în spaţiul finit dimensional generat de $y_1, y_2 \cdots, y_n$. Fie $x_0 \in K_0$ astfel încât $f(x_0) = x_0$. Vom arăta că $x_0 \in F(x_0)$ dovedind că $f(x) \in F(x)$ pentru $x \in K_0$. Intr-adevăr, dacă $p_i(x) > 0$ atunci $x \in F^{-1}(y_i)$, deci $y_i \in F(x)$. Cum $F(x)$ este convexă rezultă că $f(x) \in F(x)$, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Observaţia 8 Demonstraţia teoremei de mai sus poate face apel şi la Teorema de punct fix a lui Schauder. Mai precis, funcţia f este de fapt o selecţie continuă a lui F, selecţie ce îndeplineşte condiţiile Teoremei lui Schauder.

5 Ecuaţii semiliniare în spaţii Banach

In acest paragraf vom prezenta rezultate de existenţă pentru ecuaţii semiliniare în spaţii infinit dimensionale, folosind teoreme de punct fix.

Fie X un spaţiu Banach, A generatorul unui semigrup de clasă C_0 pe X, notat $S(t)$, $t \geq 0$, şi funcţia $f : X \to X$. Considerăm ecuaţia diferenţială

$$y'(t) = Ay(t) + f(y(t)), \; y(0) = x. \tag{9}$$

O funcţie $y \in C(I; X)$, unde $I = [0, T]$, se numeçte soluţie continuă (pe scurt, *soluţie*) a ecuaţiei (9) dacă y satisface ecuaţia integrală

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s) f(y(s)) ds, \; t \in I.$$

Teorema 19 *Dacă f este lipschitziană pe X atunci, pentru orice $x \in X$ şi orice $T > 0$, ecuaţia* (9) *are soluţie unică pe* $[0, T]$.

Demonstraţie. Fixăm $x \in X$ şi $T > 0$, notăm $I = [0, T]$ şi definim operatorul F pe $C(I, X)$ prin

$$(Fy)(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(y(s))ds. \tag{10}$$

Pentru $y, z \in C(I; X)$ şi $t \in I$, definim

$$\rho_t(y, z) = \sup_{s \in [0,t]} \|y(s) - z(s)\|.$$

Fie L constanta Lipschitz pentru f şi K o constantă pentru care are loc

$$\sup_{t \in I} \|S(t)\| \leq K.$$

Este uşor de verificat că, pentru $n \in \mathbf{N}$ şi $t \in I$, avem

$$\rho_t(F^n y, F^n z) \leq \frac{(LKt)^n}{n!} \rho_t(y, z).$$

De aici rezultă că, pentru n suficient de mare, F^n este o contracţie. Din Corolarul 1 rezultă că F are punct fix unic în $C(I, X)$, care este unica soluţie a ecuaţiei (9). $\square$

Observaţia 9 Deoarece T este arbitrar, soluţia poate fi continuată pe $[0, \infty)$. Menţionăm că, utilizând aceeaşi tehnică de demonstraţie, se pot obţine variante mai generale. De exemplu, dacă f este lipschitziană pe mulţimi mărginite, atunci se obţine soluţie locală. De asemenea, se poate considera f depinzând şi de t (continuu), sau se poate perturba ecuaţia (9) cu o funcţie $g \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty), X)$.

In cazul în care X este reflexiv şi $x \in D(A)$, soluţia dată de Teorema 19 este clasică.

Teorema 20 *Fie X spaţiu Banach reflexiv, f lipschitziană pe X, $x \in D(A)$, $T > 0$ şi $y \in C([0, T]; X)$ o soluţie a ecuaţiei* (9). *Atunci $y \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; X)$ şi $y'(t) = Ay(t) + f(y(t))$ pentru orice $t \in [0, T]$.*

Demonstraţie. Nu vom intra în detalii ci vom prezenta doar etapele importante. Se verifică mai întâi că $y : [0,T] \to X$ este lipschiziană şi deci $f \circ u : [0,T] \to X$ este lipschiziană. Rezultă că $f \circ u \in W^{1,\infty}([0,T]; X)$ ceea ce conduce la concluzie. Pentru detalii se poate consulta [95, cap.6] sau [26]. $\square$

Revenind la Teorema 19, ipoteza că f este lipschitziană poate fi slăbită, dacă se impune o ipoteză mai tare asupra semigrupului. Mai precis, dacă $S(t)$ este semigrup compact, adică dacă operatorul $S(t)$ este compact pentru orice $t > 0$, atunci se poate aplica teorema de punct fix a lui Schauder operatorului F definit mai sus.

Teorema 21 *Presupunem că A generează un semigrup compact iar f este continuă şi mărginită pe mulţimi mărginite. Atunci, pentru fiecare $x \in X$, există $T >$ astfel încât ecuaţia* (9) *are o soluţie $y \in C([0,T]; X)$.*

Demonstraţie. Din ipoteză, există $\alpha > 0$ astfel încât $\|f(\xi)\| \leq \alpha$ pentru $\xi \in B(x, 1)$. In plus, din proprietăţile semigrupului, există $\tau > 0$ astfel încât $\|S(t)x - x\| < 1/2$ pentru orice $t \in [0, \tau]$, şi există $\beta \geq 1$ astfel încât $\|S(t)\| \leq \beta$ pentru orice $t \in [0, \tau]$. Definim $T = \min\{\tau, 1/2\alpha\beta\}$, $I = [0,T]$ şi

$$M = \{y \in C(I; X);\ y(t) \in B(x, 1), \forall t \in [0,T]\}.$$

Este imediat că M este submulţime închisă mărginită şi convexă a spaţiului $C(I; X)$. Definim operatorul F pe M prin (10) şi observăm că $F(M) \subset M$ iar F este funcţie continuă. Pentru a arăta că F are punct fix, utilizăm Teorema 10. Mai avem de arătat că $F(M)$ este relativ compactă în $C(I; X)$. Vom utiliza Teorema Arzelà-Ascoli. Pentru aceasta, notăm $K = F(M)$ şi $K(t) = \{(Fy)(t);\ y \in M\}$ şi arătăm că fiecare $K(t)$ pentru $t \in I$ este relativ compactă în X, iar K este echicontinuă. Vezi Teorema 11. Deoarece $K(0) = \{x\}$, este suficient să considerăm cazul $t > 0$. Pentru $0 < \varepsilon < t \leq T$, definim

$$K_\varepsilon(t) = S(t)x + S(\varepsilon)K(t - \varepsilon).$$

Deoarece $K(t - \varepsilon)$ este mărginită în X şi $S(\varepsilon)$ este operator compact, urmează că mulţimea $K_\varepsilon(t)$ este relativ compactă pentru $t \in (\varepsilon, T]$.

Acest fapt, împreună cu inegalitatea

$$\|(Fy)(t) - S(t)x - \int_0^{t-\varepsilon} S(t-s)f(y(s))ds\| \leq MK\varepsilon,$$

arată că pentru $t > 0$ mulţimea $K(t)$ este total mărginită, deci este relativ compactă în X.

Pentru echicontinuitate observăm mai întâi că, pentru $t > \tau > 0, \quad h > 0$ şi $y \in M$ avem

$$(Fy)(t+h)-(Fy)(t) = S(t)(S(h)x-x) + \int_0^{t-\tau}(S(t+h-s)-S(t-s))f(y(s))ds+$$

$$\int_{t-\tau}^{t}(S(t+h-s)-S(t-s))f(y(s))ds + \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(y(s))ds.$$

De aici se deduce

$$\|(Fy)(t+h)-(Fy)(t)\| \le \beta\|S(h)x-x\| + \alpha\int_0^{t-\tau}\|S(t+h-s)-S(t-s)\|ds+$$

$$2\alpha\beta\tau + \alpha\beta h,$$

pentru orice $y \in M$. In plus,

$$\|(Fy)(h)-(Fy)(0)\| \le \|S(h)x-x\| + \alpha\beta h, \ \forall y \in M.$$

Ultimele două inegalităţi, impreună cu afirmaţia (vezi [95]):

Dacă $S(t)$ este un semigrup compact atunci $\|S(\cdot)\|$ este funcţie continuă pe $(0,\infty)$,

arată că mulţimea $F(M)$ este echicontinuă şi astfel demonstraţia este terminată. □

Observaţia 10 Demonstraţia de mai sus arată, în particular, că operatorul $x \mapsto P(x)$ de la $L^p(0,T;X)$ în $C([0,T];X)$, $p>1$, definit prin

$$P(x)(t) = \int_0^t S(t-s)x(s)\,ds$$

este compact.

References

[1] Aubin J.-P., Cellina A., *Differential Inclusions,* Springer-Verlag, 1984.

[2] Aubin J.-P., Frankowska H., *Set-Valued Analysis,* Birkhäuser, 1990.

[3] Arzelà C., Funzioni di linee, Atti della R. Accad. dei Lincei Rendiconti della Cl.Si. Fis. mat. Nat., (4) 5, 1889, 342-348

[4] Ascoli G., Le curve limite di una varieta data di curve, Atti della R. Accad. dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 18, 1882-1883, 521-586.

[5] Baire L. R., Sur les functions de variable réelles, Ann. Mat. Pura Appl., (3) 3, 1899, 1-222.

[6] Banach S., Sur les opéerations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales, Fund. Math., 3, 1922, 133-181.

[7] Banach S., Sur les functionelles linéaires, Studia Math., 1, 1929, 211-216 şi 223-239.

[8] Banach S., Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Math., 3, 1931, 174-179.

[9] Banach S., *Théorie des Opérations linéaires*, Monografje matematyczne, Warsaw, 1932.

[10] Banach S, Steinhaus H., Sur le principe de la condensation de singularités, Fund. Math., 9, 1927, 50-61.

[11] Barbu V., *Semigrupuri de Contracţii Neliniare în Spaţii Banach*, Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[12] Barbu V., Metode Matematice în Optimizarea Sistemelor Diferenţiale, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[13] Bebernes J. W., Schuur J.D., The Ważewski topological method for contingent equations, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 87, 1970, 271-279.

[14] Begle E. G., A fixed point theorem, Ann. of Math., (2) 51, 1950, 544-550.

[15] Bielecki A., Une remarque sur la méthode de Banach- Caccioppoli-Tikhonov dans la théorie des équations differentielles ordinaires, Bull. Acad. Polon Sci. Cl. III, 4, 1956, 261-264.

[16] Birkhoff G. D., Proof of Poincaré's geometric theorem, Trans. Amer. Math. Soc., 14, 1913, 14-22.

[17] Birkhoff G. D., Kellogg O. D., Invariant points in functin space, Trans. Amer. Math. Soc., 23, 1922, 96-115.

[18] Blair C. E., The Baire category theorem implies the principle of dependent choices, Bull. Acad. Polon. Sci., 25, 1977, 933-934.

[19] Bohnenblust H., Karlin S., On a theorem of Ville, In: Contributions to the theory of games, Kuhn and Tucker Eds., 155-160, University Press, Princeton, 1950.

[20] Borsuk K., Sur les rétractes, Fund. Math., 17, 1931, 152-170.

[21] Brézis H., Browder F., A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis, Adv. in Mathematics, 21, 1976, 355-364.

[22] Brown R.F., Elementary cosequences of the noncontractibility of the circle, Amer. Math. Monthly, 81, 1974, 247-252.

[23] Browder F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177, 1968, 283-301.

[24] Brouwer L.E.J., Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 71, 1912, 97-115.

[25] Caccioppoli R., Una teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale, Ren. Accad. Naz Lincei, 11, 1930, 794-799.

[26] Cazenave T., Haraux A., *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[27] Cârjă O., Ursescu C., The characteristics method for a first order partial differential equation, An. Şti. Univ."Al.I.Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat., 39, 1993, 367 - 396.

[28] Cârjă O., Vrabie I. I., Some new viability results for semilinear differential inclusions, NoDEA, 4, 1997, 401-424.

[29] Cellina A., Approximation of set-valued functions and fixed points theorems, Ann. Mat. Pura Appl., 82, 1969, 17-24.

[30] Costinescu O., *Elemente de topologie generală*, Editura tehnică, Bucureşti, 1969.

[31] Deimling K., *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, 1992.

[32] Dieudonné J.A., Une généralisation des espaces compactes, J. Math. Pures Appl., 23, 1944, 65-76.

[33] Dugundji J., An extension of Tietze's theorem, Pacific J. Math., 1, 1951, 353-367.

[34] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[35] Ekeland I., On the variational principle, J. Math. Anal. Appl., 74, 1974, 324-353.

[36] Feferman S., Independence of the axiom of choice from the axiom of independence choices, J. Sym. Logic, 29, 1967, 226.

[37] Gheorghiu N., *Introducere în Analiza Funcţională,* Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[38] Glicksberg I.L., A further generalization of the Kakutani fixed theorem, with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. Math. Soc., 3, 1952, 170-174.

[39] Goursat E., Sur la théorie des fonctions implicites, Bull. Soc. Math. France, 31, 1903, 184-192.

[40] Graves L.M., Some mapping theorems, Duke Math. J., 17, 1950, 111-114.

[41] Gröger K., A simple proof of the Brouwer fixed point theorem, Math. Nachr., 102, 1981, 293-295.

[42] Hahn H., Über Folgen linearen Operationen, Monatsh. math. Phys., 32, 1922, 3-88.

[43] Halmos P., Vaughan H., The marriage problem, 72, 1950, 214-215.

[44] Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Verlag von Veit, Leipzig, 1914.

[45] Hill L.S., Properties of certain aggregate functions, Amer. J. Math., 49, 1927, 419-432.

[46] Hildebrandt T. H., On uniform limitedness of sets of functional operators, Bull. Amer. Math. Soc., 29, 1923, 309-315.

[47] Holmes R., *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer, 1975.

[48] Kakutani S., A generalization of Brouwer's fixed-point theorem, Duke Math. J., 8, 1941, 457-459.

[49] Kantorovici L.V., Akilov G.P., *Analiză Funcţională,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[50] Karamardian S., Generalized complementarity problem, J. Optim. Theory Appl., 8, 1971, 161-168.

[51] Kelley J.L., The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, Fund. Math., 37, 1950, 75-76.

[52] Klein E., Thompson A.C., *Theory of Correspondences*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[53] Kuratowski K., Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés, Fund. Math., 18, 1932, 148-180.

[54] Kuratowski K., *Topology*, Academic Press, New York, 1966.

[55] Ky Fan, Fixed-point and minimax theorems in locally convex linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., 38, 1952, 121-126.

[56] Ky Fan, A minimax inequality and applications, in: Inequalities III, 103-113, Academic Press, New York, 1972.

[57] Ky Fan, Glicksberg I., Some geometric properties of the spheres in a normed linear space, Duke Math. J., 25, 1958, 553-568.

[58] Leray J, Schauder J., Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 51, 1934, 45-78.

[59] Lichtenstein L., Über einige Existenzprobleme der Variationsrehnung. Methode der unendlichvielen Variabeln, J. Reine Angew. Math., 145, 1915, 24-85.

[60] Lifshits E.A., Ideally convex sets, Funct. Anal. Appl., 4, 1970, 330-331, tradus din Funkts. Anal. Prilozh., 4, 1970, 76-77

[61] Lindenstrauss J, Tzafriri L, On the complemented subspaces problem, Israel J. Math., 9, 1971, 263-269.

[62] Lyusternik L.A., Conditional extrema of functionals, Mat. Sb., 41, 1934, 390-401.

[63] Marchaud A., Sur les champs continus de demi-cones convex et leur integrales, Comp. math., 3, 1936, 89-127.

[64] Megginson R. E., *An Introduction to Banach Spaces Theory*, Springer, 1998.

[65] Michael E., Continuous selections I, Ann. Math., 63, 1956, 361-382.

[66] Michael E., Continuous selections II, Ann. Math., 64, 1956, 562-580.

[67] Miranda C., Un'osservazione su un teorema di Brouwer, Boll. Un. Mat. Ital., (2) 3, 1940, 527.

[68] Moore R. L., Concerning upper semicontinuous collections of continua, Trans. Amer. Math. Soc., 27, 1925, 416-428.

[69] Moore E. H., Smith H. L., A general theory of limits, Amer. J.Math., 44, 1922, 102-121.

[70] Nadler S. B. Jr., Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math., 30, 1969, 475-488.

[71] Nagumo M., Über die Lage der Integralkurven gewönlicher Differentialgleichungen, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 24, 1942, 551-559.

[72] Ostrowski A.M., The round-off stability of iterations, Z. Angew. Math. Mech., 47, 1967, 77-81.

[73] Phillips R. S., On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 48, 1940, 516-541.

[74] Picard E., Mémoire sur la théorie des équations aux dérivés partielles et la méthode des approximations successives, J. Math. Pures Appl. 6, 1890, 145-210.

[75] Picone M., *Lezioni di analizi infinitesimale*, vol. 1, Circolo Matematico di Catania, Catania, Italy, 1923.

[76] Popa E., *Culegere de Probleme de Analiză Funcţională,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[77] Precupanu A., *Analiză Matematică. Funcţii Reale,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

[78] Precupanu A., *Bazele Analizei Matematice,* Editura Universităţii "Al.I.Cuza" Iaşi, Iaşi, 1993.

[79] Precupanu T., *Spaţii Liniare Topologice şi Elemente de Analiză Convexă,* Editura Academiei, Bucureşti, 1992.

[80] Robinson S., Regularity and stability for convex multivalued functions, Math. Oper. Res., 1, 1976, 130-143.

[81] Rudin M.E., A new proof that metric spaces are paracompact, Proc. Am. Math. Soc., 20, 1969, 603.

[82] Saint Raymond J., Multivalued contractions, Set-Valued Anal., 2, 1994, 559-571.

[83] Schauder J., Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math.Z., 26, 1927, 63-98.

[84] Schauder J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math., 2, 1930, 171-180.

[85] Schauder J., Über lineare, vollstetige funktionaloperationen, Studia Mat., 2, 1930, 183-196.

[86] Stampacchia G., Formes bilinéaires coercitives sur les ensemble convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964, 4413-4416.

[87] Steinlein H., On two results of J. Dugundji about extensions of maps and retractions, Proc. Amer. Math. Soc., 77, 1979, 289-290.

[88] Stone A.H., Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 1948, 977-982.

[89] Tychonoff A.N., Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Anal., 102, 1930, 544-561.

[90] Tychonoff A. N., Über einen Funktionenräum, Math. Ann., 111, 1935, 767-776.

[91] Tychonoff A. N., Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111, 1935,

[92] Ursescu C., Multifunctions with closed convex graph, Czech. Math. J., 25, 1975, 438-441.

[93] Urysohn P., Über die Mächtigkeit der Zusammenhängenden Mengen, Math. Ann., 94, 1925, 262-295.

[94] Vrabie I. I., *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Second Edition, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **75**, Longman, 1995.

[95] Vrabie I. I., *Semigrupuri de Operatori Liniari şi Aplicaţii*, Editura Universităţii "Al.I.Cuza", Iaşi, 2001.

[96] Von Neumann J., Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Math. Ann., 100, 1928.

[97] Von Neumann J., Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Browerschen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, Vienna 8, 1937, 73-83.

[98] T. Ważewski, Sur une condition équivalent à l'équation au contingent, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. e Phys.*, **9** (1961), pp. 865-867.

[99] Zabreĭko P.P., A theorem for semiadditive functionals, Functional Anal. Appl., 3, 1969, 70-72.

[100] Zaremba S.K., Sur les equations au paratingent, Bull. Sci. Math., 60, 1936, 139-160.

[101] Zălinescu C., *Programare Matematică în Spaţii Infinit Dimensionale*, Editura Academiei, Bucureşti, 1999.

[102] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications; Part I: Fixed-Point Theorems, Part II: Monotone Operators, Part III: Variational Methods and Optimization, Parts IV/V: Applications to Mathematical Physics*, Springer, 1984.