Relația fundamentală a staticii fluidelor

Se porneşte de la ecuația vectorială de echilibru dedusă anterior:

$$\frac{1}{\rho}gradp = \overline{f}_m$$

Pentru a putea integra ecuația vectorială este necesar să se exprime forțele masice unitare tot cu ajutorul unui gradient:

$$\overline{f}_m = -gradU$$

unde U =potențialul forțelor masice unitare.

Se obține prin înlocuire în ecuația vectorială:

$$\frac{1}{\rho}gradp + gradU = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\rho}gradp + gradU\right)\overline{dr} = 0$$

Se calculează ca exemplu:

$$gradp \cdot \overline{dr} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\overline{k}\right)\left(dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}\right) = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = dp \Rightarrow gradp \cdot \overline{dr} = dp$$

şi se obține:

$\Rightarrow \frac{1}{\rho}dp + dU = 0$ - relația fundamentală a staticii sub formă diferențială

iar prin integrare se obține:

$\Rightarrow \int\frac{dp}{\rho} + U = ct$ - relația fundamentală a staticii sub formă integrală.

Se deduc în continuare diversele forme ale relației fundamentale a staticii.

1.Relația fundamentală a staticii pentru fluide incompresibile

Pentru fluidele incompresibile ρ = ct. şi efectuând integrala rezultă:

$$\frac{p}{\rho} + U = ct \Rightarrow p + \rho U = ct$$

2. Transformarea izotermă a gazelor

Relația fundamentală în cazul repausului izoterm al fluidelor ușoare se deduce în condiția $T=ct$ pentru care $pV=ct$ și considerând că masa de gaz nu se schimbă în cursul transformării, $m=ct$, se obține:

$$p\frac{m}{\rho}=ct \qquad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho}=ct$$

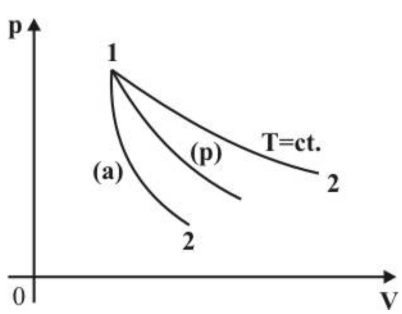
Ecuația de transformare a stării gazului față de starea inițială, a cărui parametri termodinamici sunt notați cu indicele 0, este:

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0} \Rightarrow p=\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\rho \Rightarrow dp=\frac{p_0}{\rho_0}\cdot d\rho \Rightarrow \int\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\frac{d\rho}{\rho}+U=ct \Rightarrow \frac{p_0}{\rho_0}\ln\rho+U=ct$$

și în final:

$$\frac{p_0}{\rho_0}\ln\rho+U=ct$$

3. Transformarea adiabatică a gazelor



$$pV^k=ct$$

$$p\frac{m^k}{\rho^k}=ct,\ m=ct \Rightarrow \frac{p}{\rho^k}=ct$$

$$\frac{p}{\rho^K}=ct \Rightarrow dp=\frac{p_0}{\rho_0^k}\cdot k\cdot\rho^{k-1}d\rho$$

$$\int\frac{p_0}{\rho_0^k}\cdot k\cdot\rho^{k-1}\frac{d\rho}{\rho}+U=ct \Rightarrow$$

$$\frac{p_0}{\rho_0^k}\cdot k\int\rho^{k-2}d\rho+U=ct \Rightarrow$$

$$\frac{p_0}{\rho_0^K}\cdot\frac{k}{k-1}\cdot\rho^{K-1}+U=ct$$

4. Transformarea politropă a gazelor

$pV^n=ct$, cu $n-$exponentul politropic. Se obține în mod analog:

$$\frac{p_0}{\rho_0^n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\rho^{n-1}+U=ct$$

Calculul potențialului forțelor masice unitare

$$\overline{f}_m = -gradU \quad \Rightarrow \quad gradU = -\overline{f}_m \quad \Rightarrow \quad (gradU)\overline{dr} = -(\overline{f_m})\overline{dr} \quad \Rightarrow$$

$$dU = -\left(X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}\right)\left(dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}\right) = -\left(Xdx + Ydy + Zdz\right)$$

şi se obține expresia potențialului forțelor masice unitare:

$$U = -\int (Xdx + Ydy + Zdz)$$

Consecințele relației fundamentale ale repausului fluidelor

1.Suprafețele echipotențiale $(U = ct)$ sunt şi suprafețe izobare :

$$p + \rho U = ct \quad \Rightarrow \quad \rho = ct$$

2.Suprafețele echipotențiale $(U = ct)$ sunt şi suprafețe izodense:

$$\rho = ct$$

3.Suprafețele echipotențiale sunt şi suprafețe izoterme:

$$T = ct$$

4.Două suprafețe echipotențiale nu se intersectează.

Prin reducere la absurd, în cazul în care suprafețele s-ar intersecta, se deduce că în zona intersecției am avea două presiuni, ceea ce este imposibil . Deci suprafețele echipotențiale nu se intersectează.

5.Forța masică unitară este orientată perpendicular pe suprafața echipotențială în sensul creşterii presiunii şi scaderii potențialului.

6.Două lichide nemiscibile au suprafața de separație echipotențială.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{- pentru primul lichid obținem:} & dp = -\rho_1 U \\ \text{- pentru al doilea lichid:} & dp = -\rho_2 U \end{array}\right\} \Rightarrow (\rho_2 - \rho_1)dU = 0 \Rightarrow dU = 0 \Rightarrow U = ct$$

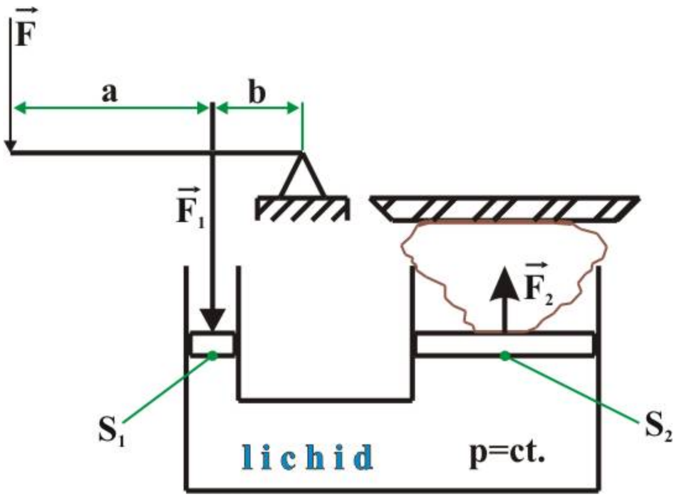
7.Într-un fluid în repaus, în care forțele masice sunt neglijabile în raport cu cele de presiune, se consideră că presiunea rămâne constantă în întreg volumul de fluid considerat.

$$\left.\begin{array}{r} \overline{f}_m = 0\text{, din } \overline{f_m} = -gradU \Rightarrow gradU = 0 \Rightarrow U = ct \\ p + \rho U = ct \end{array}\right\} \Rightarrow p = ct$$

principiul lui Pascal

Aplicații ale principiului lui Pascal

1.Presa hidraulică



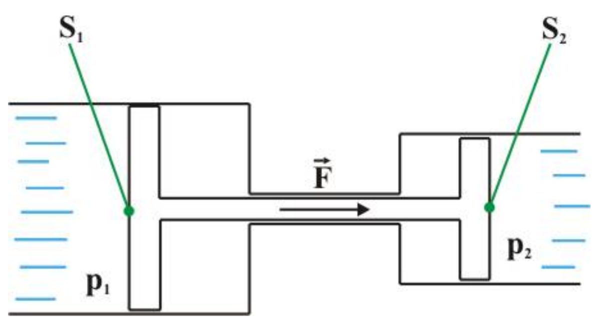
Deoarece forțele de presiune sunt foarte mari față de forțele masice se poate considera că presiunea $p = ct$ în toată masa de lichid. Atunci se obține:

$$\frac{F_2}{S_2} = \frac{F_1}{S_1} \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

Se aplică conservarea momentului forțelor față de articulația 0:

$$F(a+b) = F_1 \cdot b \quad \Rightarrow \quad F_1 = F \cdot \frac{a+b}{b} \quad \Rightarrow \quad F_2 = F \cdot \frac{a+b}{b} \cdot \frac{S_2}{S_1} >> F$$

2.Amplificatorul hidraulic de presiune

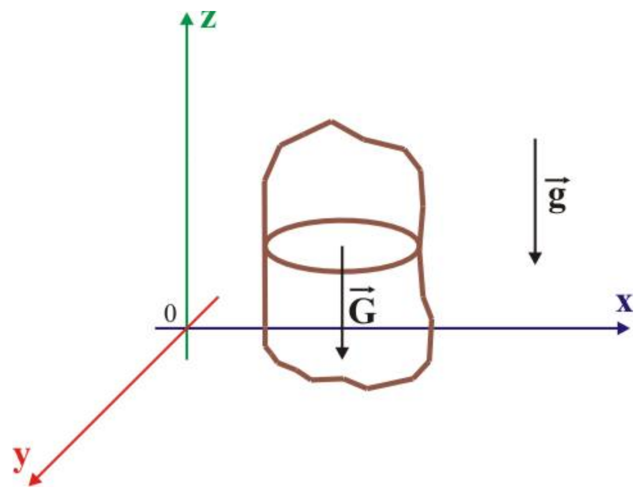


Se consideră că forța transmisă prin bara rigidă, orizontală, ce leagă pistoanele din cei doi cilindri de diametre interioare diferite este constantă:

$$F = ct \quad \Rightarrow \quad p_2 \cdot S_2 = p_1 \cdot S_1 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} >> p_1$$

S-a obținut astfel o presiune mult mai mare p_2 față de presiunea p_1.

Repausul fluidelor în câmpul gravitațional



$p + \rho U = ct$

$\overline{f_m} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} = -g\bar{k}$

U = $\int -(Xdx + Ydy + Zdz)$ = - $\int - gdz$ =

gz + ct

S-a considerat că X = Y = 0 deoarece nu există atracție pe orizontală în câmpul gravitațional.

$$\left.\begin{array}{l} p + \rho U = ct \\ U = gz + ct \\ \text{Deoarece } \rho g = \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow p + \rho gz = ct$$

$$\Rightarrow p + \gamma z = ct \text{ sau } \frac{p}{\gamma} + z = ct$$

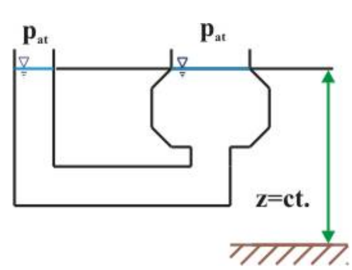
Interpretarea energetică a relației fundamentale:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p}{\gamma} + z = ct \\ \rho g = \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p}{\rho g} + z = ct \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{p}{\rho g} \cdot mg + z \cdot mg = ct \\ m = \rho V \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p}{\rho g} \cdot \rho V g + z \cdot mg = ct \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad pV + mgz = ct$$

Suma dintre energia de presiune si cea potențială rămâne constantă.

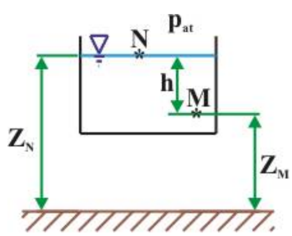
Principiul vaselor comunicante:



$$\left.\begin{array}{l} p + \gamma z = ct \\ p = p_{at} = ct \end{array}\right\} \Rightarrow z = ct$$

Se constată deci că în cazul în care pe suprafețele libere ale lichidului din cele două vase comunicante acționează aceeaşi presiune, lichidul se ridică la acelaşi nivel în fiecare vas.

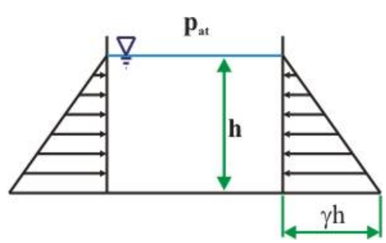
Calculul presiunii în interiorul unui lichid în repaus :



$$p+\gamma z=ct$$
$$p_M+\gamma z_N=p_N+\gamma z_N$$
$$p_M=p_N+\gamma(z_N-z_M)=p_N+\gamma\cdot h$$
$$p_M=p_{at}+\gamma\cdot h$$
$$p_M=p_{at}+\rho g h$$

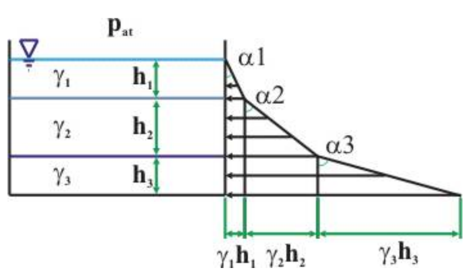
Repartiția de presiuni pe pereții solizi ai unui rezervor

Deoarece presiunea creşte liniar cu adâncimea conform ultimei relații, se obține o repartiție triunghiulară de presiuni cu unghiul la vârf α dat de:



$$tg\alpha=\frac{\gamma h}{h}=\gamma$$

Repartiția de presiuni pentru trei lichide nemiscibile (ce nu se amestecă) se obține ținând cont că lichidul cu greutate specifică mai mare se lasă la fundul vasului iar cel cu greutate specifică mai mică se ridică la suprafață.



Unghiul la vârf creşte cu adâncimea, deci odată cu creşterea greutății specifice a lichidului respectiv.

Presiunea la baza rezervorului se obține ca sumă a presiunilor data de cele trei coloane de lichid suprapuse (suma segmentelor de la bază din dreapta desenului).

Repausul relativ al fluidelor în câmpul gravitațional

Un fluid se găseşte în repaus relativ, dacă se află în repaus față de un sistem de referință mobil, aflat în mişcare uniform variată față de un alt sistem de referință fix.

Exemple: - lichidul dintr-un camion aflat în mişcare uniform accelerată.
- lichidul dintr-un vas aflat în mişcare circulară uniformă.

Pentru a analiza situația ne putem situa pe sistemul de referință fix (pământ) pentru care se aplică principiul al II-lea al dinamicii (lichidul se mişcă o dată cu vehiculul respectiv) sau ne situăm pe observatorul mobil unde apare forța de inerție si pentru care:

$$\sum \overline{F} = 0 \;\; : \;\; \overline{F_m} + \overline{F_p} + \overline{F_i} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \overline{F_i} = -m\overline{a} \;\; \Rightarrow \;\; \overline{F_m} + \overline{F_p} = m\overline{a}$$

Considerăm că observatorul se găseşte pe sistemul mobil, deci se ia în considerare forța de inerție, pentru care ecuația vectorială de echilibru este :

$$\frac{1}{\rho} grad p = \overline{f}_m + \overline{f_i}$$

Se obține în mod analog cu repaosul absolut relația fundamentală a repausului relativ:

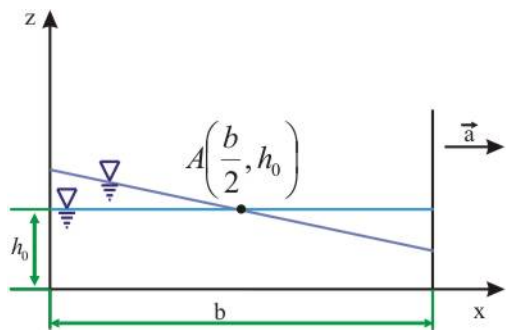
$$p + \rho U_T = ct$$

unde U_T este potențialul total al forțelor masice unitare şi al forțelor unitare de inerție şi este dat de:

$$U_T = U + U_i$$

Pentru a efectua calculele într-o situație practică concretă se determină inițial expresia potențialului total şi apoi prin înlocuirea acestuia în relația fundamentală a repaosului relativ se poate obține repartiția de presiuni pe pereții solizi cu care fluidul se află în contact, respectiv zona solicitată la presiune maximă, deci cea care poate ceda prima la solicitări.

Analiza mişcării de translație a unui rezervor umplut parțial cu lichid



Problema se rezolvă în două etape:

1.Determinarea ecuației suprafeței libere:

Se porneşte de la relația fundamentală a repaosului relativ:

$$p + \rho U_T = ct$$

şi se determină expresia potențialului total cunoscând componentele forței masice unitare şi ale forței unitare de inerție:

$$U_T = -\int (X + X_i)dx + (Y + Y_i)dy + (Z + Z_i)dz$$

$$\overline{f_m} = \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = -g \end{cases} \qquad \overline{f_i} = \begin{cases} X_i = -a \\ Y_i = 0 \\ Z_i = 0 \end{cases}$$

Prin înlocuire rezultă:

$$U_T = -\int (-adx - gdz) = ax + gz + ct$$

Deoarece pe suprafața liberă a lichidului presiunea este constantă şi egală cu cea atmosferică:

$$p = p_{at} = ct$$

se deduce prin înlocuire în relația fundamentală a repaosului relativ că:

$$U_T = ct$$

Cu alte cuvinte, suprafața liberă a lichidului este o suprafață de potențial total constant.

Se deduce ca urmare ecuația suprafeței libere a lichidului utilizând faptul că punctul A se găsește pe această suprafață:

$$ax + gz = C \qquad \text{Pentru} \quad A\left(\frac{b}{2}, h_0\right) \Rightarrow \begin{cases} a\dfrac{b}{2} + gh_0 = C \\ ax + gz = a\dfrac{b}{2} + gh_0 \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{a}{g}x + \frac{ab}{2g} + h_0$$

Aceasta este de fapt ecuația unei drepte cu pantă negativă ce corespunde suprafeței libere a lichidului din desenul prezentat anterior.

2.Repartiția de presiuni în interiorul lichidului și pe pereții solizi

Prin înlocuirea formei finale a potențialului total în formula presiunii se obține:

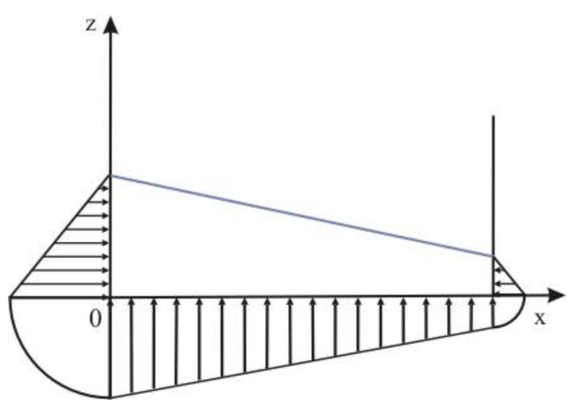
$$p + \rho(ax + gz) = C_2$$

Punând din nou condiția ca punctual A să se găsească pe suprafața liberă, la presiunea atmosferică, se obține:

$$p_{at} + \rho\left(\frac{ab}{2} + gh_0\right) = C_2 \Rightarrow p = p_{at} + \rho\left(\frac{ab}{2} + gh_0\right) - \rho(ax + gz)$$

adică presiunea în interiorul lichidului și pe pereții solizi interiori este o funcție liniară de două variabile spațiale, $p = p(x, z)$.

Punând condițiile necesare pentru fiecare parte a suprafeței solide cu care lichidul vine în contact, se obține în final repartiția de presiuni pe pereții rezervorului:



Se observă că zonele cele mai solicitate sunt cele corespunzătoare muchiilor ce trec prin origine și extremitatea jos dreapta. Se vor lua măsurile adecvate pentru a spori rezistența rezervorului în zonele respective.