

UNDE ELECTROMAGNETICE

Cuprins:

6.7. Reflexia și refracția undelor electromagnetice

6.7.1. Cazul incidenței normale pe interfața dintre două materiale dielectrice

6.7.2. Cazul incidenței oblice pe interfața dintre două medii dielectrice

6.7.3. Reflexia și refracția la interfața dintre un dielectric și un conductor

6.7. Reflexia și refracția undelor electromagnetice

6.7.1. Cazul incidenței normale pe interfața dintre două materiale dielectrice

Să considerăm o undă electromagnetică armonică plană, cu frecvența

ω și amplitudinea câmpului electric E_1 , polarizată în direcția axei Ox , care se propagă în direcția axei Oz , normală la interfața celor două medii dielectrice liniare, omogene și izotrope.

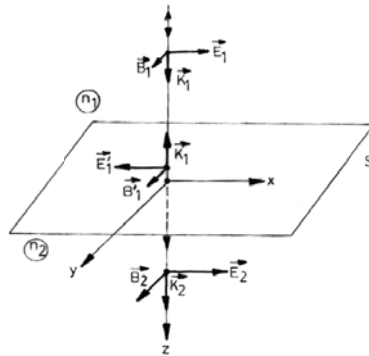


Figura 6.8: Reflexia și transmisia unei unde electromagnetice cu incidență normală pe o interfață S care separă mediile dielectrice cu indicii de refracție n_1 și n_2

În figura 6.8 se reprezintă: unda incidentă prin cei trei vectori \vec{E}_1, \vec{B}_1 și \vec{K}_1 ; unda reflectată prin vectorii \vec{E}'_1, \vec{B}'_1 și $-\vec{K}_1$ și unda transmisă în mediul al doilea prin vectorii \vec{E}_2, \vec{B}_2 și \vec{K}_2 . La trecerea unei electro-magnetice

dintr-un mediu în celălalt sunt satisfăcute condițiile la limită prezentate în paragraful 5.3 ecuația 5.46. Dacă unda incidentă plană și monocromatică are cele două câmpuri scrise sub forma

$$\vec{E}_1 = E_1 \vec{i} e^{i(K_1 z - \omega t)} \quad \text{și} \quad \vec{B}_1 = B_1 \vec{j} e^{i(K_1 z - \omega t)} \quad (6.73)$$

atunci unda reflectată este reprezentată prin

$$\vec{E}'_1 = E'_1 \vec{i} e^{-i(K_1 z + \omega t)} \quad \text{și} \quad \vec{B}'_1 = B'_1 \vec{j} e^{-i(K_1 z + \omega t)} \quad (6.74)$$

și unda transmisă are forma

$$\vec{E}_2 = E_2 \vec{i} e^{i(K_2 z - \omega t)} \quad \text{și} \quad \vec{B}_2 = B_2 \vec{j} e^{i(K_2 z - \omega t)} \quad (6.75)$$

unde \vec{i} și \vec{j} sunt versorii axelor Ox și respectiv Oy iar amplitudinile câmpurilor electrice sunt legate de cele ale câmpurilor magnetice prin

$$B = \frac{E}{v} = \frac{nE}{c}, \quad \text{iar} \quad K = \frac{n\omega}{c}.$$

O condiție la limită se referă la continuitatea componentei tangențiale a câmpului electric la $z=0$. Din expresiile (6.73–6.75) această condiție devine

$$E_1 - E'_1 = E_2 \quad (6.76)$$

Această condiție implică că cele trei unde trebuie să aibă aceeași frecvență ω pentru ca ea să fie satisfăcută la orice moment t .

O a doua condiție la limită exprimă continuitatea componentelor tangențiale ale lui $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ la $z=0$. În cazul nostru ea se scrie sub forma

$$B_1 + B'_1 = B_2 \quad (6.77)$$

sau, folosind relația $B = \frac{nE}{c}$,

$$n_1(E_1 + E'_1) = n_2 E_2 \quad (6.78)$$

Rezolvăm sistemul de ecuații (6.76) și (6.78) pentru a obține

$$r_{12p} = \frac{E'_1}{E_1} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad \text{și} \quad t_{12p} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad (6.79)$$

unde r_{12p} este *coeficientul de reflexie* și t_{12p} este *coeficientul de transmisie*.

Relațiile (6.79) sunt *relațiile lui Fresnel* pentru incidentă normală. Indicele p arată că undele sunt plan polarizate. Dacă ne interesează intensitățile undelor reflectate și transmise în raport cu intensitatea undei incidente este necesar să definim reflectanța R și transmitanța T prin relațiile:

$$R = \frac{\langle S'_1 \rangle}{\langle S_1 \rangle} \quad \text{și} \quad T = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_1 \rangle} \quad (6.80)$$

unde $\langle S_1 \rangle, \langle S'_1 \rangle$ și $\langle S_2 \rangle$ sunt mediile temporale ale intensităților undelor incidentă, reflectată și respectiv, transmisă (vezi paragraful 5.4, ecuația 5.71)

Deoarece $\langle S \rangle = \frac{n \langle E^2 \rangle}{\mu c}$ ecuațiile (6.78), (6.80) conduc la

$$R = r_{12p}^2 \quad \text{și} \quad T = \frac{n_2}{n_1} t_{12p}^2 \quad (6.81)$$

Din conservarea energiei trebuie ca $R + T = 1$ ceea ce se verifică pe baza relațiilor (6.79) și (6.81).

6.7.2. Cazul incidenței oblice pe interfața dintre două medii dielectrice

În acest caz unda incidentă este polarizată într-un plan oarecare care conține direcția de propagare. Pentru analiza reflexiei și refracției se descompune unda incidentă în două componente: o componentă în planul de

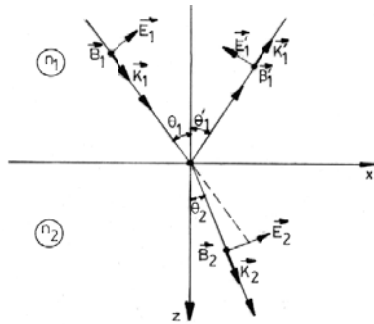


Figura 6.9: Reflexia și refracția unei unde cu polarizare p în cazul incidenței oblice

incidență numită *polarizarea p* și altă componentă polarizată normal la planul de incidență numită *polarizarea s* . În figura 6.9 sunt schițate unda incidentă cu polarizarea p , unda reflectată și cea transmisă cu polarizarea tot în planul p . Planul p este format de raza incidentă și normala la suprafață și conține în el vectorul câmp electric \vec{E}_1 și vectorul de undă \vec{K}_1 . Vectorul \vec{B}_1 este perpendicular pe planul p . Planul de polarizare p coincide în cazul nostru cu planul paginii.

În conformitate cu notațiile din figura 6.9 cele trei unde au câmpurile electric și magnetic de forma:

Unda incidentă

$$\vec{E}_1 e^{i(\vec{K}_1 \vec{r} - \omega t)}, \quad \frac{n_1}{c} \vec{k}_{1u} \times \vec{E}_1 e^{i(\vec{K}_1 \vec{r} - \omega t)} \quad (6.82)$$

Unda reflectată

$$\vec{E}_1' e^{i(\vec{K}_1' \vec{r} - \omega t)}, \quad \frac{n_1}{c} \vec{k}'_{1u} \times \vec{E}_1' e^{i(\vec{K}_1' \vec{r} - \omega t)} \quad (6.83)$$

Unda transmisă

$$\vec{E}_2 e^{i(\vec{K}_2 \vec{r} - \omega t)}, \quad \frac{n_2}{c} \vec{k}_{2u} \times \vec{E}_2 e^{i(\vec{K}_2 \vec{r} - \omega t)} \quad (6.84)$$

unde \vec{k}_{1u} , \vec{k}'_{1u} și \vec{k}_{2u} sunt versorii direcțiilor de propagare ale celor trei unde. Acești versori sunt orientați în direcțiile θ_1, θ_1' și θ_2 în raport cu normala la interfață ca și vectorii de undă \vec{K}_1, \vec{K}_1' și \vec{K}_2 . Vectorii \vec{E}_1, \vec{E}_1' și \vec{E}_2 sunt amplitudinile celor 3 câmpuri și sunt orientați ca în figura 6.9.

Să aplicăm condițiile la limită la planul $z = 0$ ca și în cazul incidenței normale. Condiția de continuitate a componente tangențiale a câmpului electric la $z = 0$ se scrie:

$$E_1 \cos \theta_1 e^{i\vec{K}_1 \vec{r}} - E'_1 \cos \theta'_1 e^{i\vec{K}'_1 \vec{r}_0} = E_2 \cos \theta_2 e^{i\vec{K}_2 \vec{r}_0} \quad (6.85)$$

unde am ținut cont de expresiile (6.82) – (6.84) ale câmpurilor celor 3 unde și am notat cu \vec{r}_0 vectorul de poziție al câmpului în planul $z = 0$, care constituie interfața dintre cele două medii cu indicii de refracție n_1 și n_2 .

A doua condiție de continuitate a componentei tangențiale a intensității câmpului magnetic, \vec{H} , se scrie:

$$n_1 E_1 e^{i\vec{K}_1 \vec{r}_0} + n_1 E'_1 e^{i\vec{K}'_1 \vec{r}_0} = n_2 E_2 e^{i\vec{K}_2 \vec{r}_0} \quad (6.86)$$

Această relație rezultă din ecuațiile (6.82)–(6.84) care arată că inducția magnetică (deci și \vec{H}) este perpendiculară pe planul p pentru toate cele 3 unde.

Remarcăm că ecuațiile (6.85) și (6.86) diferă față de relațiile (6.76) și (6.78) din cazul incidenței normale, prin factorii de fază $e^{i\vec{K}_1 \vec{r}_0}$, $e^{i\vec{K}'_1 \vec{r}_0}$ și $e^{i\vec{K}_2 \vec{r}_0}$. Pentru ca cele două condiții de continuitate (6.85) și (6.86) să fie satisfăcute pentru orice punct de vector de poziție \vec{r}_0 de pe interfață este necesar ca acești factori de fază să fie acordați și apoi amplitudinile celor trei unde să fie corelate corespunzător. Acest *acord de faze* implică relațiile

$$\vec{K}_1 \vec{r}_0 = \vec{K}'_1 \vec{r}_0 = \vec{K}_2 \vec{r}_0 \quad (6.87)$$

care introduse în (6.85) și (6.86) conduc la

$$E_1 \cos \theta_1 - E'_1 \cos \theta'_1 = E_2 \cos \theta_2, \quad n_1 (E_1 + E'_1) = n_2 E_2 \quad (6.88)$$

unde θ_1, θ'_1 și θ_2 sunt unghiurile de incidență, reflexie și respectiv, refracție.

Să analizăm mai întâi consecințele acordului de fază dat de relațiile (6.87). Deoarece vectorul \vec{r}_0 poate fi scris cu ajutorul versorului normalei la interfață \vec{n} (cu direcția și sensul axei Oz) sub forma

$$\vec{r}_0 = -\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r}_0)$$

produsul scalar dintre un vector de undă \vec{K} și \vec{r}_0 devine

$$\vec{K} \vec{r}_0 = -\vec{K} [\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r}_0)] = -(\vec{K} \times \vec{n}) \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_0) \quad (6.89)$$

În conformitate cu ecuația (6.89), relațiile (6.87) devin

$$(\vec{K}_1 \times \vec{n}) \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_0) = (\vec{K}'_1 \times \vec{n}) \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_0) = (\vec{K}_2 \times \vec{n}) \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_0) \text{ sau} \quad (6.90)$$

$$\vec{K}_1 \times \vec{n} = \vec{K}'_1 \times \vec{n} = \vec{K}_2 \times \vec{n}$$

Forma vectorială a acestor relații reafirmă presupunerea inițială că vectorii \vec{K}_1, \vec{K}'_1 și \vec{K}_2 sunt coplanari. Cu alte cuvinte, razele luminoase incidente, reflectate și transmise sunt coplanare. În plus, relațiile (6.90) conduc la

$$K_1 \sin \theta_1 = K'_1 \sin \theta'_1 = K_2 \sin \theta_2 \quad (6.91)$$

care exprimă egalitatea mărimilor celor trei vectori din ecuațiile (6.90).

Din cauză că unda incidentă și cea reflectată se propagă în același mediu, vectorii lor de undă trebuie să fie egali în mărime: adică $K_1 = K'_1$ și prima egalitate din (6.91) conduce la

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad (6.92)$$

Adică unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie. Această relație exprimă *legea reflexiei*. În plus, deoarece $K_i = \frac{\omega}{v_i} = \frac{n_i \omega}{c}$ cu $i=1,2$ din (6.91) deducem *legea refracției* (sau legea lui Snell)

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (6.93)$$

Să ne întoarcem la relațiile (6.88) dintre amplitudinile celor trei unde din care scoatem rapoartele $\frac{E'_1}{E_1}$ și $\frac{E_2}{E_1}$ care reprezintă coeficienții de reflexie r_p și respectiv de transmisie t_p . Din (6.88) obținem

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}, \quad t_p = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (6.94)$$

Acestea pot fi transformate prin utilizarea relației (6.93) care servește la eliminarea indicilor n_1 și n_2 . În final, relațiile (6.94) se scriu

$$r_p = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}, \quad t_p = \frac{2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (6.95)$$

Acestea sunt *relațiile lui Fresnel pentru undele polarizate în planul de incidență*, notate cu p .

În cazul când avem undă polarizată în planul normal pe planul de incidență, adică avem o polarizare în planul s , printr-un raționament asemănător cu cel din cazul undelor cu polarizarea p , ajungem la relațiile lui Fresnel de forma

$$r_s = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}, \quad t_s = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (6.96)$$

care exprimă coeficientul de reflexie, r_s , și respectiv de transmisie, t_s pentru undele polarizate (cu vectorul câmp electric) în planul s .

Incidența normală discutată în 6.7.1. poate fi dedusă ca un caz particular al incidenței oblice. În acest caz $\theta_1 = \theta_2 = 0$ și relațiile lui Fresnel (6.95) și (6.96) conduc la

$$r_p = -r_s = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad \text{și} \quad t_p = t_s = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad (6.97)$$

Acest rezultat coincide cu cel dat de formulele (6.79). Reflectanța R și transmitanța T sunt aceleași pentru ambele polarizări deoarece ele depind de pătratele coeficienților r și t în conformitate cu ecuația (6.81).

Incidența razantă În acest caz unghiul de incidență este $\theta_1 \approx \frac{\pi}{2}$ astfel că ecuațiile lui Fresnel (6.94) și (6.96) conduc la

$$r_p = -r_s = -1 \quad t_p = t_s = 0 \quad (6.98)$$

Deci $R_p = R_s = 1$ și $T_p = T_s = 0$ adică avem reflexie totală pentru ambele polarizări.

Incidența critică – Reflexia internă totală Unghiul de incidență critic se obține când unda este incidentă pe o interfață dintr-o regiune cu indice de refracție mai mare și când unghiul de refracție devine $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Din ecuațiile

(6.94) și (6.96) în acest caz în care $n_1 > n_2$ și $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ obținem

$$\begin{aligned} r_p &= 1, & r_s &= 1 \text{ sau} \\ R_p &= R_s = 1 \end{aligned} \quad (6.99)$$

Aceste relații indică că intensitatea unei reflectate este aceeași cu intensitatea unei incidente, sau cu alte cuvinte, unda incidentă a suferit o *reflexie totală*. Unghiul de incidență de la care are loc reflexia totală este numit unghiul critic θ_c și este dat de legea lui Snell în care $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Din ecuația (6.93) obținem

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \text{ sau } \theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \text{ cu } n_1 > n_2 \quad (6.100)$$

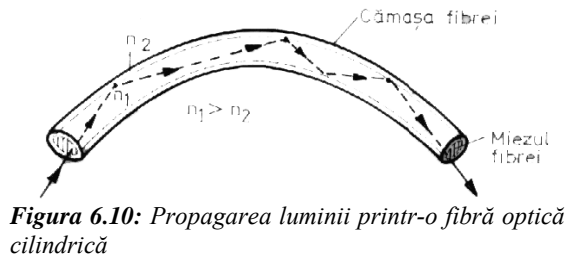


Figura 6.10: Propagarea luminii printr-o fibră optică cilindrică

Se poate arăta ușor că reflexia totală are loc pentru toate unghiurile de incidență mai mari decât unghiul critic. Reflexia totală este utilizată în propagarea luminii prin *fibre optice* care au miezul cu un indice de

refracție n_1 mai mare decât cel al cămașii. (vezi figura 6.10).

6.7.3. Reflexia și refracția la interfața dintre un dielectric și un conductor

În acest paragraf vom analiza reflexia și refracția la interfața dintre un dielectric și un mediu conductor. De exemplu, reflexia undelor care vin din aer pe o suprafață plană care formează o oglindă pentru undele luminoase sau pentru microunde. În paragraful 6.4. am arătat că propagarea undelor electromagnetice într-un mediu conductor este descrisă corect dacă se utilizează indicele de refracție complex, \tilde{n} și vectorul de undă complex \tilde{K} . Expresiile acestor mărimi complexe sunt [ecuația (6.46) și (6.59)]

$$\tilde{n} = n_r \left(1 + i \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^{1/2} = n + ik \quad \text{și} \quad \tilde{K} = \frac{\omega}{c} \tilde{n} \quad (6.101)$$

și depind de frecvența undei ω și de conductivitatea σ a mediului. Partea reală n a indicelui de refracție complex \tilde{n} ia în considerație natura refractivă a mediului, în timp ce partea imaginară k reprezintă absorbția undei în mediu.

Abordarea acestei probleme este asemănătoare cu cea din 6.7.1.-2 care se referă la interfața dintre două medii neconductoare. Rezultatele sunt asemănătoare cu deosebirea că indicii de refracție nu mai sunt numere reale ci sunt complexe. De exemplu, relațiile (6.79) devin

$$\tilde{r}_{12} = \frac{\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1}{\tilde{n}_2 + \tilde{n}_1} \quad \tilde{t}_{12} = \frac{2\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2 + \tilde{n}_1} \quad (6.102)$$

din care se observă că și coeficienții lui Fresnel devin mărimi complexe. O altă formă convenabilă a relațiilor (6.102) se obține dacă substituim $\tilde{n}_1 = n_1$ (dielectric) și $\tilde{n}_2 = n_2 + ik_2$ (conductor). Obținem

$$\tilde{r}_{12} = \frac{(n_2 - n_1) + ik_2}{(n_2 + n_1) + ik_2}, \quad \tilde{t}_{12} = \frac{2n_1}{(n_2 + n_1) + ik_2} \quad (6.103)$$

Din cauză că \tilde{r}_{12} și \tilde{t}_{12} sunt numere complexe rezultă că undele reflectată și transmisă sunt defazate față de unda incidentă. În scopul de a determina defazajele menționate mai sus vom scrie coeficienții lui Fresnel în coordonate polare sub forma

$$\tilde{r}_{12} = |\tilde{r}_{12}| e^{i\phi_r}, \quad \tilde{t}_{12} = |\tilde{t}_{12}| e^{i\phi_t} \quad (6.104)$$

Din comparația relațiilor (6.103) cu (6.104) obținem

$$\tilde{r}_{12} = \left(\frac{(n_2 - n_1)^2 + k_2^2}{(n_2 + n_1)^2 + k_2^2} \right)^{1/2}, \quad \tilde{t}_{12} = \frac{2n_1}{[(n_2 + n_1)^2 + k_2^2]^{1/2}} \quad (6.105)$$

și

$$\text{tg}\phi_r = \frac{2n_1 k_2}{n_2^2 - n_1^2 + k_2^2} \quad \text{tg}\phi_t = -\frac{k_2}{n_2 + n_1} \quad (6.106)$$

Din relațiile de mai sus rezultă atât mărimea coeficienților lui Fresnel cât și defazajele ϕ_r și ϕ_t pentru unda reflectată și respectiv, transmisă față de unda incidentă. Cunoscând coeficienții lui Fresnel putem calcula reflectivitatea

$$R = \tilde{r}_{12} \cdot \tilde{r}^* = |\tilde{r}_{12}|^2 \quad (6.107)$$

și absorbția $A = 1 - R$ deoarece transmitanța T este fracțiunea din intensitatea incidentă transmisă prin interfață și apoi absorbită în mediul conductor. Din definițiile de mai sus obținem

$$A = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2 + k_2^2} \quad \text{și} \quad R = 1 - \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2 + k_2^2} \quad (6.108)$$

De exemplu, pentru metale $n_2 \gg 1$ și din (6.108) obținem

$$A \approx \frac{2}{k_2} \text{ și } R \approx 1 - \frac{2}{k_2} \quad (6.109)$$

Dacă coeficientul de absorbție, k_2 , este mic (cum este cazul oglinzilor de argint) atunci $A \approx 0$ și $R \approx 1$ adică aproape toată lumina incidentă normal este reflectată. Mai exact, dacă înlocuim coeficientul de absorbție cu expresia din paragraful 6.4 obținem relațiile

$$A = 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}}, \quad R = 1 - 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \quad (6.110)$$

cunoscute sub numele de *formula Hagen-Rubens*, care este valabilă pentru conductorii buni la frecvențe mai mari de 10^{15} Hz (optice) iar pentru conductorii moderați este valabilă la frecvențele de 10^9 Hz (microunde).

Cazul undei cu incidență oblică pe o interfață dielectric-conductor este mult mai complicat decât cazul corespunzător al interfeței dielectric-dielectric.

Această complicație apare din faptul că unghiurile devin complexe ca și vectorul de undă și indicele de refracție. Deși este greu să tragem concluzii fizice din formulele matematice cu unghiuri complexe vom scrie legea lui Snell

$$\tilde{n}_2 \sin \tilde{\theta}_2 = n_1 \sin \theta_1 \quad (6.111)$$

și coeficienții lui Fresnel

$$\tilde{r}_p = \frac{\tilde{n}_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \tilde{\theta}_1}{\tilde{n}_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \tilde{\theta}_1}, \quad \tilde{t}_p = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{\tilde{n}_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \tilde{\theta}_2} \quad (6.112)$$

$$\tilde{r}_s = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2}{n_1 \cos \theta_1 + \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2}, \quad \tilde{t}_s = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \tilde{\theta}_2} \quad (6.113)$$

în care mediul conductor este reprezentat prin indicele de refracție complex, \tilde{n}_2 și unghiul de refracție complex $\tilde{\theta}_2$. Aceste relații sunt asemănătoare cu relațiile (6.93) și (6.94) din cazul interfeței dielectric-dielectric. Cu relațiile (6.107) putem calcula din (6.112) și (6.113) coeficienții de reflexie de la o interfață dielectric-conductor, însă ele nu sunt convenabile pentru a determina direcția de propagare, deoarece ele implică unghiuri complexe și produse de cantități complexe. Prin urmare, este necesar să definim un unghi real de refracție în mediul conductor. În acest scop se pornește de la acordul de fază la interfață dat de ecuațiile (6.87)–(6.90) care în cazul nostru le scriem

$$\tilde{\vec{K}}_2 \cdot \vec{r}_0 = \vec{K}_1 \cdot \vec{r}_0 \quad (6.114)$$

$$\tilde{\vec{K}}_2 \times \vec{n} = \vec{K}_1 \times \vec{n} \quad (6.115)$$

cu vectorul de undă $\tilde{\vec{K}}_2$ complex și \vec{n} versorul normalei la interfață. Adică el poate fi descompus într-o parte reală \vec{K}_{2r} și alta imaginară \vec{K}_{2i}

$$\tilde{\vec{K}}_2 = \vec{K}_{2r} + i\vec{K}_{2i} \quad (6.116)$$

Introducem (6.116) în (6.115) și egalăm părțile reale și cele imaginare

$$\vec{K}_1 \times \vec{n} = \vec{K}_{2r} \times \vec{n} \text{ și } \vec{K}_i \times \vec{n} = 0 \quad (6.117)$$

Aceste ecuații ne furnizează atât direcțiile cât și mărimile părților reale și imaginare ale lui \vec{K}_2 . Se observă că:

- 1) Atât \vec{K}_{2r} cât și \vec{K}_{2i} se află în planul de incidență;
- 2) \vec{K}_{2i} este în direcția normalei la suprafața (deoarece $\vec{K}_{2i} \times \vec{n} = 0$) și putem scrie $\vec{K}_{2i} = K_{2i} \cdot \vec{n}$;

- 3) Mărimea primei relații din (6.117) implică ca

$$K_1 \sin \theta_1 = K_{2r} \sin \phi \quad (6.118)$$

unde ϕ este unghiul real dintre \vec{K}_{2r} și normala la interfață.

În figura 6.11 se schițează propagarea unei unde electromagnetice prin mediul conductor. Se observă planele de amplitudine constantă, care sunt normale la \vec{K}_{2r} și planele de fază constantă care sunt normale la \vec{K}_{2i} . Acestea fac un unghi ϕ între ele. La incidență normală acest unghi este zero. Rămâne de determinat mărimile: unghiul real ϕ , partea reală K_{2r} și partea imaginară, K_{2i} , ale vectorului de undă \vec{K}_2 . Acest calcul nu îl vom face aici, ci vom menționa rezultatele

$$K_{2r} \cos \phi = R_e \left(\vec{K}_2 \cos \tilde{\theta}_2 \right) \quad (6.119)$$

$$K_{2i} = I_m \left(\vec{K}_2 \cos \tilde{\theta}_2 \right) \quad (6.120)$$

$$\vec{K}_2 \cos \tilde{\theta}_2 = \frac{\omega}{c} (\vec{n} + i\vec{k}) \quad (6.121)$$

unde \vec{n} și \vec{k} sunt calculate din constantele optice ale materialului date de ecuația (6.119). În final se obține

$$K_{2r} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\vec{n}^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_1} \text{ și } K_{2i} = \frac{\omega}{c} \vec{k} \quad (6.122)$$

Dacă se definește indicele de refracție real și efectiv al mediului conductor

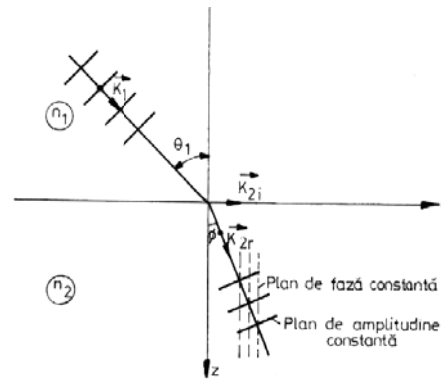


Figura 6.11: Reprezentarea schematică a refracției la interfața dintre un dielectric și un conductor. Planele de fază constantă sunt înclinate la unghiul ϕ față de cele de amplitudine constantă

$$N(\theta_1) = \sqrt{\bar{n}^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_1} \quad (6.123)$$

ecuația (6.118) devine

$$N(\theta_1) \sin \phi = n_1 \sin \theta_1 \text{ și } N(\theta_1) \cos \phi = \bar{n} \quad (6.124)$$

Prima ecuație din (6.124) este asemănătoare cu legea lui Snell pentru materiale dielectrice și permite determinarea unghiului de refracție ϕ în funcție de indicele de refracție efectiv calculat cu (6.123).