Definiție. Fie $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci $F: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.n. primitivă a lui *f* pe *I* dacă *F* este derivabilă pe *I* şi $F'(x) = f(x), \forall x \in I$

<u>Notație</u> $F(x) = \int f(x)dx$

<u>Observație</u>. Dacă *F* este primitivă atunci *F+const* este primitivă, notăm $F(x) = \int f(x)dx + const$

Teoremă (Darboux). Fie $F: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci $F'(I)$ este interval

Consecință. Dacă *F* este primitivă a lui *f* (se mai spune şi că *f* posedă, admite, primitive) atunci *f*, fiind derivata unei funcții, este o funcție cu proprietatea lui Darboux.

Consecință. Funcția $f:(-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = [x]$ nu admite primitive

Teoremă. Dacă *f* este continuă atunci *f* admite primitive

Observație importantă. Teorema ne permite să afirmăm existența primitivelor pentru funcții ale căror primitive nu se pot exprima prin intermediul funcțiilor elementare, de exemplu $\int e^{-x^2} dx$

Proprietăți ale primitivei

1. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$
2. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

<u>Observație</u>. Operatorul $\int : V \to W$, V, W spații vectoriale abstracte de funcții, este liniar

3. dacă *f* este continuă şi φ este derivabilă cu derivata continuă, atunci

$$\left(\int f(x)dx\right)(x) = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)(t) + const$$, *schimbarea de variabilă* $x = \varphi(t)$

4. dacă *f* şi *g* sunt derivabile, cu derivatele continue, atunci

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$, *formula de integrare prin părți*

Sume Darboux

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită

$\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$, $m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$, $M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f$

Definiție Se numeşte <u>sumă Darboux inferioară</u>: $s_\Delta = \sum m_i (x_{i+1} - x_i)$

Se numeşte <u>sumă Darboux superioară</u>: $S_\Delta = \sum M_i (x_{i+1} - x_i)$

Proprietăți

- $m(b-a) \le s_\Delta \le S_\Delta \le M(b-a)$
- dacă $\Delta \prec \Delta'$ atunci $s_\Delta \le s_{\Delta'}$
- $s_{\Delta_1} \le S_{\Delta_2}$

Definiție. $I_* = \sup s_\Delta$ se numeşte integrala Darboux inferioară, $I^* = \inf S_\Delta$ se numeşte integrala Darboux superioară, *f* se numeşte **integrabilă în sens Darboux dacă** $I_* = I^*$

Teoremă. Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită, atunci

f este integrabilă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall \|\Delta\| < \delta_\varepsilon, S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$

Teoremă. Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ monotonă, atunci *f* este integrabilă Darboux

Teoremă. Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă, atunci *f* este integrabilă Darboux

Primitivele funcţiilor elementare

$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + const, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$, pe $\mathbb{R}$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + const$, pe $(0,\infty)$ sau $(-\infty,0)$

$\int \sin x dx = -\cos x + const$, pe $\mathbb{R}$

$\int \cos x dx = \sin x + const$, pe $\mathbb{R}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + const$, pe $(-1,1)$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g x + const$, pe $(0,\pi)$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + const$, pe $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + const$, pe $\mathbb{R}$

$\int e^x dx = e^x + const$, pe $\mathbb{R}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + const$, pe $\mathbb{R}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + const$, pe $\mathbb{R}$

Exemple

1. $\int x\ln x dx = \int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + const.$

2. $\int\sqrt{1+x^2}dx = \int\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \int x\left(\sqrt{1+x^2}\right)'dx =$

$= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}dx \Rightarrow \int\sqrt{1+x^2}dx = \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\sqrt{1+x^2}}{2}$

3. $\int\frac{x}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\left[\int\frac{-x+1}{x^2+x+1}dx + \int\frac{1}{x-1}dx\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx + \ln|x-1|\right] =$

$\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{3}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx + \ln|x-1|\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \sqrt{3}arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \ln|x-1|\right]$

Primitive binome - substituţiile lui Cebâşev

$\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx$, $m,n,p \in \mathbb{Q}$

I. $p \in \mathbb{Z}$, $x = t^s$, s numitorul comun al fracţiilor m şi n

II. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, $ax^n + b = t^r$, r numitorul lui p

III. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, $ax^n + b = t^r x^n$, r numitorul lui p

Exemplu: $\int x\sqrt[3]{x^2+1}dx$, m=1, n=2, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{1+1}{2} = 1$, $x^2+1 = t^3$, $x = \left(t^3-1\right)^{\frac{1}{2}}$, $dx = \frac{3}{2}t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{2}}dt$,

$\int x\sqrt[3]{x^2+1}dx = \int\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{2}}t\left(\frac{3}{2}\right)t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{3}{2}\int t^3 dt = \frac{3}{8}t^4 + const = \frac{3}{8}\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{3}} + const.$