CAPITOLUL 9
CALCUL INTEGRAL

9.1. INTEGRALE GENERALIZATE

9.1.1. INTEGRALE CU LIMITE INFINITE

BREVIAR TEORETIC

Definiție. Fie $f:[a,\infty)\to R$ o funcție integrabilă pe orice interval compact $[a,c]$, $c>a$. Dacă $\lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_a^c f(x)dx$ există şi este finită, spunem că $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ este convergentă şi vom nota

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int\limits_a^c f(x)dx.$$

Criteriu de convergență. Fie $f:[a,\infty)\to R$, $a>0$, $f(x)>0$, $\forall x\in[a,\infty)$. Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot f(x)=L\in R$, atunci:

1) pentru $\alpha>1$, rezultă că $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.

2) pentru $\alpha\le 1$ şi $L\ne 0$, rezultă că $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Folosind definiția, să se studieze natura următoarelor integrale şi în caz de convergență să se determine valoarea acestora:

$a)\ I_1 = \int_a^{\infty} e^{-kx}dx, k \in R$; $b)\ I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx$;

$c)\ I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+6x+12}dx$; $d)\ I_4 = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx,\ \alpha \in R$;

$e)\ I_5 = \int_{-\infty}^{0} x\cos x dx$; $f)\ I_6 = \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6}dx$.

Rezolvare:

$a)$ Vom aplica definiția din breviarul teoretic.

Funcția $f:[a,\infty) \to R,\ f(x) = e^{-kx}$ este integrabilă pe orice interval compact $[a,c],\ c > a$. Studiem existența şi valoarea limitei:

$$L = \lim_{c\to\infty} \int_a^c e^{-kx}dx = \lim_{c\to\infty} -\frac{1}{k}\left(e^{-kc} - e^{-ka}\right) = \frac{e^{-ka}}{k} - \frac{1}{k}\lim_{c\to\infty} e^{-kc},$$

pentru $k \neq 0$.

- Pentru $k > 0$ avem $\lim_{c\to\infty} e^{-kc} = 0 \Rightarrow L = \frac{1}{k}e^{-ka}$, prin urmare

integrala este convergentă şi $\int_a^{\infty} e^{-kx}dx = \frac{1}{k}e^{-ka}$.

- Pentru $k < 0$ avem $\lim_{c\to\infty} e^{-kc} = \infty \Rightarrow L = \infty$, deci integrala este

divergentă.

- pentru $k = 0$ avem $I_1 = \int_a^{\infty} e^0 dx = \int_a^{\infty} dx$; $\lim_{c\to\infty} \int_a^c dx = \lim_{c\to\infty} x\Big|_a^c = +\infty$,

rezultă că integrala este divergentă.

$b)$ Aplicăm definiția. Funcția $f:(-\infty,0]\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ este integrabilă pe orice interval compact $[-c,0],\ c>0$. Vom studia limita:

$$L=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{0}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx=\lim_{c\to\infty}\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\Big|_{-c}^{0}=\ln\sqrt{2}-$$

$$-\lim_{c\to\infty}\ln\left(-c+\sqrt{c^2+2}\right)=\ln\sqrt{2}-\lim_{c\to\infty}\ln\frac{2}{c+\sqrt{c^2+2}}=\ln\sqrt{2},$$

prin urmare integrala I_2 este convergentă şi $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx=\ln\sqrt{2}$.

$c)$ Funcția $f:R\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+12}$ este integrabilă pe orice interval compact $[-c,c],\ c>0$. Vom studia limita:

$$L=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{1}{x^2+6x+12}dx=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{1}{(x+3)^2+3}dx=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{c\to\infty}\left(arctg\frac{c+3}{\sqrt{3}}-arctg\frac{-c+3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}},$$ rezultă

că integrala I_3 este convergentă şi $\displaystyle I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+6x+12}dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

$d)$ Funcția $f:[1,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$ este integrabilă pe orice interval compact $[1,c],\ c>1$. Studiem existența şi valoarea limitei:

$\displaystyle L=\lim_{c\to\infty}\int_{1}^{c}\frac{1}{x^\alpha}dx$. Pentru $\alpha\neq 1$ avem:

$$L=\lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{c\to\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^c=\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha-1}\lim_{c\to\infty}c^{1-\alpha};$$

- Dacă $\alpha<1\Rightarrow L=\infty$, rezultă că integrala este divergentă.
- Dacă $\alpha>1\Rightarrow L=\dfrac{1}{\alpha-1}$, deci integrala este convergentă.
- Dacă $\alpha=1\Rightarrow L=\lim\limits_{c\to\infty}\displaystyle\int_1^c\frac{1}{x}dx=\lim\limits_{c\to\infty}\ln c=\infty$, prin urmare

integrala este divergentă.

e) Aplicăm definiția. Funcția $f:(-\infty,0]\to R,\ f(x)=x\cos x$ este integrabilă pe orice interval compact $[-c,0],\ c>0$. Vom studia limita:

$$L=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^0 x\cos xdx=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^0 x(\sin x)'dx=\lim_{c\to\infty}\left(x\sin x\Big|_{-c}^0-\int_{-c}^0\sin xdx\right)=$$

$$=\lim_{c\to\infty}(-c\sin c+1-\cos c)=\lim_{c\to\infty}c\left(-\sin c+\frac{1}{c}-\frac{\cos c}{c}\right)=\lim_{c\to\infty}f(c);$$

pentru $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty$;

pentru $x_n'=2n\pi-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=\infty$, prin urmare nu există

$\lim\limits_{c\to\infty}\displaystyle\int_{-c}^0 x\cos xdx$, deci integrala $I_5=\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\cos xdx$ este divergentă.

$f)$ Funcția $f:[-1,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ este integrabilă pe orice interval compact $[-1,c],\ c>-1$. Studiem limita:

$$L=\lim_{c\to\infty}\int_{-1}^{c}\frac{1}{x^2+5x+6}dx=\lim_{c\to\infty}\int_{-1}^{c}\frac{1}{(x+\frac{5}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}dx=$$

$$=\lim_{c\to\infty}\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\Bigg|_{-1}^{c}=\lim_{c\to\infty}\left(\ln\frac{c+2}{c+3}-\ln\frac{1}{2}\right)=\ln 2$$, prin urmare

integrala I_6 este convergentă şi $I_6=\displaystyle\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{x^2+5x+6}dx=\ln 2$.

2. Utilizând criteriul de convergență, să se studieze natura următoarelor integrale, iar în caz de convergență să se afle valoarea acestora:

$$a)\ I_1=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{1+x^6}dx;\ b)\ I_2=\int_{-1}^{\infty}\frac{3x+4}{x\sqrt[3]{2x+3}}dx;\ c)\ \int_1^{\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx.$$

Rezolvare:

$a)$ Funcția $f:[0,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^6}$, are proprietatea că $f(x)>0,\ \forall x\in[0,\infty)$. Deoarece $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\alpha}\frac{x^2}{1+x^6}=1$, pentru $\alpha=4>1$ rezultă, conform criteriului de convergență enunțat în breviarul teoretic, că integrala este convergentă.
Valoarea integralei este:

$$I=\lim_{c\to\infty}\int_0^{c}\frac{x^2}{1+x^6}dx=\lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{3}arctgx^3\Big|_0^c\right)=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{3}arctgc^3=\frac{\pi}{6}.$$

$b)$ Funcția $f:[-1,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{3x+4}{x\sqrt[3]{2x+3}}$, are proprietatea că $f(x)>0,\ \forall x\in[-1,\infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot\dfrac{3x+4}{x\sqrt[3]{2x+3}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$, pentru $\alpha=\dfrac{1}{3}<1$ rezultă, conform criteriului de convergență, că integrala este divergentă.

$c)$ Funcția $f:[1,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{arctgx}{x^2}$, are proprietatea că $f(x)>0,\ \forall x\in[1,\infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot\dfrac{arctgx}{x^2}=\frac{\pi}{2}$ pentru $\alpha=2>1$ rezultă, conform criteriului de convergență, că integrala este convergentă. Valoarea integralei este:

$$I=\lim_{c\to\infty}\int_1^c\left(-\frac{1}{x}\right)' arctgx\,dx=\lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{x}arctgx\Big|_1^c+\int_1^c\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}\right)=.$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^c\frac{2xdx}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\lim_{c\to\infty}\int_1^{c^2}\frac{dt}{t(t+1)}=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\lim_{c\to\infty}\ln\frac{c^2}{c^2+1}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

3. Să se studieze natura integralei: $I=\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{x^m}{2x^2-4x+1}dx,\ m\in R$.

Rezolvare:

Funcția $f:[2,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{x^m}{2x^2-4x+1}$, are proprietatea că $f(x)>0,\ \forall x\in[2,\infty)$.

Avem că $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} \cdot \frac{x^m}{2x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2}$ dacă şi numai dacă $\alpha + m = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2 - m$. Rezultă că:

- Pentru $\alpha = 2 - m > 1 \Leftrightarrow m < 1$, integrala este convergentă.
- Pentru $\alpha = 2 - m \le 1 \Leftrightarrow m \ge 1$, integrala este divergentă.

4. Să se determine valorile parametrului $n \in R$ pentru care

integrala $I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{5\sqrt[11]{2x^{35}+8}} dx$ este convergentă.

Rezolvare:

Funcția $f:[0,\infty) \to R,\ f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{5\sqrt[11]{2x^{35}+8}}$, are proprietatea că $f(x) > 0,\ \forall x \in [0,\infty)$.

$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{5\sqrt[11]{2x^{35}+8}} = \frac{1}{5\sqrt[11]{2}}$ dacă şi numai dacă

$\alpha + \frac{n}{2} - 1 = \frac{35}{11} \Leftrightarrow \alpha = \frac{46}{11} - \frac{n}{2}$.

Ca urmare a aplicării criteriului de convergență, avem că integrala este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha = \frac{46}{11} - \frac{n}{2} > 1 \Rightarrow n < \frac{70}{11}$.

PROBLEME PROPUSE

Folosind definiția, să se studieze natura următoarelor integrale şi în caz de convergență să se determine valoarea acestora (notată I):

1. $\int_0^\infty xe^{-ax}dx,\ a\in R$ **R:** divergentă dacă $a\le 0$; convergentă dacă $a>0$ şi $I=\frac{1}{a^2}$.

2. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2-2x+4}$ **R:** convergentă, $I=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

3. $\int_0^\infty \sin xdx$ **R:** divergentă.

4. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$; **R:** divergentă.

5. $\int_3^\infty \frac{2x+1}{x^2+4x+3}dx$ **R:** divergentă.

6. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^\alpha}dx,\ \alpha\in Z$ **R:** divergentă pentru $\alpha\le 1$, convergentă pentru $\alpha>1$ şi $I=\frac{(-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

7. $\int_{-\infty}^\infty x\sin dx$ **R:** divergentă.

8. $\int_{-1}^\infty xa^x dx,\ a>0$ **R:** convergentă pentru $a\in(0,1)$ şi $I=-a\cdot\frac{\ln a-1}{\ln^2 a}$; divergentă pentru $a\ge 1$.

9. $\int_0^{\infty} \cos^2 x dx$ **R:** divergentă.

10. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$ **R:** divergentă.

11. $\int_e^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}} dx$ **R:** convergentă şi $I = 2$.

12. $\int_1^{\infty} \frac{2x-1}{x^3+1} dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln 2$.

13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

14. $\int_1^{\infty} e^{-ax} \cos x\, dx,\ a \in R$ **R:** divergentă dacă $a \le 0$; convergentă dacă $a > 0$ şi $I = \frac{a}{a^2+1}$.

15. $\int_1^{\infty} \frac{arctgx}{x^2+1} dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{3\pi^2}{32}$.

16. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} dx,\ \alpha \in R$ **R:** divergentă dacă $\alpha \le 1$; convergentă dacă $\alpha > 1$ şi $I = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$.

Utilizând criteriul de convergență pentru funcții pozitive, să se studieze natura integralelor următoare şi, dacă este posibil, să se determine valoarea lor.

17. $\int_1^{\infty} \frac{arctgx}{x} dx$ **R:** divergentă.

18. $\int_{-1}^{\infty} \frac{2x+3}{x\sqrt[3]{5x+6}}dx$ **R:** divergentă.

19. $\int_{1}^{\infty} \frac{arctgx}{x^4}dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\ln 2$.

20. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 5x + 13}dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}$.

21. $\int_{1}^{\infty} \frac{3x^2+4}{x\sqrt[3]{2x^5+3}}dx$ **R:** divergentă.

22. $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^3 - 1}dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{18} - \frac{1}{6}\ln 3$.

23. $\int_{-1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{3x+5}}{x^2+2x+4}dx$. **R:** convergentă.

Să se studieze natura integralelor:

24. $\int_{2}^{\infty} \frac{x^m}{x^2+2x+4}dx,\ m \in R$.

R: convergentă dacă $m < 1$, divergentă dacă $m \geq 1$.

25. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^m+3x+1}dx,\ m \in R$.

R: divergentă dacă $m \leq 3$, convergentă dacă $m > 3$.

26. $\int_1^\infty \frac{\sqrt[7]{2x-1}}{(3x-2)\sqrt[m]{4x+3}}dx,\ m \in N,\ m \geq 2$

R: convergentă dacă $m < 7$, divergentă dacă $m \geq 7$.

Să se determine mulțimea valorilor parametrilor $a, b, c \in R$ pentru care următoarele integrale sunt convergente:

27. $\int_1^\infty \frac{5+\sqrt[5]{2x^{2a+1}}}{3x^7+4}dx$. **R:** $a < \frac{29}{2}$.

28. $\int_0^\infty \frac{x\sqrt[3]{2x^5}}{9x^b+1}dx$. **R:** $b > \frac{11}{3}$.

29. $\int_2^\infty \frac{x+x^{3c-1}}{\sqrt[4]{2x-1}}dx$. **R:** $c \in \varnothing$.

9.1.2. INTEGRALE DIN FUNCȚII NEMĂRGINITE

BREVIAR TEORETIC

Definiție. Fie $f:(a,b]\to R$ o funcție integrabilă pe orice interval compact $[c,b]\subset(a,b]$ şi $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\infty$. Dacă $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ există şi este finită, vom spune că $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ este convergentă şi vom nota $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

Criteriu de convergență. Fie $f:(a,b]\to R,\ f(x)>0,\ \forall x\in(a,b]$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

1) Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}(x-a)^{\beta}\cdot f(x)=A\in R$, pentru $\beta<1$ atunci $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ este convergentă.

2) Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}(x-a)^{\beta}\cdot f(x)=A\in R^{*}$, pentru $\beta\ge 1$ atunci $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ este divergentă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Folosind definiția, să se studieze natura următoarelor integrale şi în caz de convergență să se determine valoarea acestora:

$a)\ I_1=\int_{-3}^{0}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx;\quad b)\ I_2=\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^2-6x+8}dx;$

$c)\ I_3=\int_{a}^{b}\frac{1}{(x-a)^p}dx,\ p\in R;\quad d)\ I_4=\int_{1}^{e}\frac{1}{x\ln x}dx;$

Rezolvare:

$a)$ Fie $f:(-3,0]\to R,\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$. Cum

$$\lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}=+\infty,$$

rezultă că funcția este nemărginită în unul din punctele domeniului de integrare.
Avem că f este continuă, deci integrabilă pe orice interval compact $[c,0]\subset(-3,0]$.
Studiem existența şi valoarea limitei:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\\varepsilon>0}}\int_{-3+\varepsilon}^{0}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\\varepsilon>0}}\arcsin\frac{x}{3}\Big|_{-3+\varepsilon}^{0}=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\\varepsilon>0}}\left(0-\arcsin\frac{-3+\varepsilon}{3}\right)=\frac{\pi}{2},$$

deci integrala este convergentă şi $I_1=\int_{-3}^{0}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}$.

$b)$ Fie $f:[-1,2)\to R,\ f(x)=\frac{1}{x^2-6x+8}$. Cum $\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}f(x)=+\infty$,

rezultă că funcția este nemărginită în unul din punctele domeniului de integrare.

Funcţia f este continuă, deci integrabilă pe orice interval compact $[-1,c]\subset[-1,2)$.

Studiem existenţa şi valoarea limitei:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{-1}^{2-\varepsilon}\frac{1}{x^2-6x+8}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{-1}^{2-\varepsilon}\frac{1}{(x-3)^2-1}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|\right)\Bigg|_{-1}^{2-\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\left(\ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}-\ln\frac{5}{3}\right)=\infty,$$ deci integrala este divergentă.

c) Funcţia $f:(a,b]\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{(x-a)^p}$ este nemărginită şi integrabilă pe orice interval compact $[c,b]\subset(a,b]$. Studiem limita:

$$L=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{1}{(x-a)^p}dx=\frac{1}{1-p}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}(x-a)^{1-p}\Big|_{a+\varepsilon}^{b}=$$

$$=\frac{1}{1-p}\left((b-a)^{1-p}-\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{1-p}\right),$$ pentru $p\neq 1$.

- Dacă $p<1$ avem $L=\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$, deci integrala este

convergentă şi are valoarea: $I_3=\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx=\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$.

- pentru $p>1$ avem $L=\infty$, deci integrala este divergentă.
- pentru $p=1$ avem

$$L=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{1}{x-a}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\ln|x-a|\Big|_{a+\varepsilon}^{b}=\ln(b-a)-\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\ln\varepsilon=+\infty,$$

prin urmare integrala este divergentă.

$d)$ Fie $f:(1,e]\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$,

rezultă că funcția este nemărginită în unul din punctele domeniului de integrare.
Funcția f este continuă, deci integrabilă pe orice interval compact $[c,e]\subset(1,e]$.
Studiem existența şi valoarea limitei:

$\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int\limits_{1+\varepsilon}^{e} \dfrac{1}{x\ln x}dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \ln(\ln x)\Big|_{1+\varepsilon}^{e} = -\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \ln(\ln(1+\varepsilon))=\infty$, deci

integrala este divergentă.

2. Folosind criteriul de convergență pentru funcții pozitive să se studieze natura următoaelor integrale şi, dacă este posibil, să se determine valoarea acestora:

$a)\ \int\limits_{0}^{2}\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$; $b)\ \int\limits_{1}^{4}\dfrac{1}{x^3-3x+2}dx$;

$c)\ \int\limits_{a}^{b}\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx,\ a<b$.

Rezolvare:

$a)$ Fie $f:[0,2)\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. Avem:

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}=+\infty$. Vom aplica criteriul de convergență enunțat în

breviarul teoretic. Avem că $f(x)>0,\ \forall x\in[0,2)$ şi.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{(2-x)^{\alpha}}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{(2-x)^{\alpha}}{(2+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$$ pentru $\alpha=\frac{1}{2}<1$, deci, conform criteriului de convergență, rezultă că integrala este convergentă. Valoarea integralei este:

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{2-\varepsilon}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

$b)$ Fie $f:(1,4]\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x+2}$.

Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{1}{x^3-3x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)}=+\infty$. Avem că $f(x)>0,\ \forall x\in(1,4]$ şi.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{(x-1)^{\alpha}}{(x-1)^2(x+2)}=1$ pentru $\alpha=2>1$, deci, conform criteriului de convergență, rezultă că integrala este divergentă.

$c)$ Fie $f:(a,b)\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$. Scriem

$\int\limits_a^b\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx=I_1+I_2$, unde $I_1=\int\limits_a^c\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$ şi

$I_2=\int\limits_c^b\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx,\quad a<c<b.$

Avem că $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=+\infty$ şi $f(x)>0,\ \forall x\in(a,c]$;

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} (x-a)^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$ pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, prin urmare integrala I_1 este convergentă.

Avem că $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = +\infty$ şi $f(x) > 0, \ \forall x \in [c, b)$;

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b-x)^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$ pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, deci integrala I_2 este convergentă.

În concluzie, integrala $I = I_1 + I_2$ este convergentă.

Pentru a calcula I_1 şi I_2, facem schimbarea de variabilă:

$x = a + (b-a)\sin^2 t \Rightarrow dx = 2(b-a)\sin t \cos t dt$;

Obținem:

$$I = I_1 + I_2 = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}}^{\arccos\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}} \frac{1}{\sqrt{(b-a)^2 \sin^2 t \cdot \cos^2 t}} \cdot 2(b-a)\sin t \cos t \, dt =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}}^{\arccos\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}} 2dt = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2t \Big|_{\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}}^{\arccos\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}} = \pi .$$

PROBLEME PROPUSE

Folosind definiția, să se studieze natura următoarelor integrale şi în caz de convergență să se determine valoarea acestora (notată I):

1. $I_1 = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi}{2}$.

2. $I_2 = \int\limits_{1}^{3} \frac{1}{x^2 - 8x + 15} dx$. **R:** divergentă.

3. $I_3 = \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{(b-x)^m} dx,\ m \in R$. **R:** convergentă şi $I = \frac{(b-a)^{1-m}}{1-m}$ dacă $m < 1$, divergentă dacă $m \geq 1$.

4. $I_4 = \int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$. **R:** divergentă.

Folosind criteriul de convergență pentru funcții pozitive să se studieze natura următoaelor integrale şi dacă este posibil să se determine valoarea acestora:

5. $\int\limits_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx$. **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi}{2}$.

6. $\int\limits_{-2}^{1} \frac{1}{x^3 - 3x - 2} dx$. **R:** divergentă.

7. $\int\limits_{a}^{b} \frac{1}{(x-a)(b-x)} dx,\ a < b$. **R:** divergentă.

8. $\int\limits_{3}^{5} \frac{1}{\sqrt{(x-3)(5-x)}} dx$. **R:** convergentă şi $I = \pi$.

Să se studieze natura integralelor:

9. $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$. **R:** divergentă.

10. $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$. **R:** convergentă şi $I=-\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$.

Utilizând criteriul de convergență pentru funcții pozitive să se studieze natura integralelor, şi, în caz de convergență, să se determine valoarea lor:

11. $\int_0^1 \frac{1}{(x+3)\sqrt{x}}dx$. **R:** convergentă şi $I=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

12. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)x}}dx$. **R:** convergentă şi $I=\pi$.

13. $\int_2^3 \frac{1}{x^2-3x+2}dx$. **R:** divergentă.

Să se precizeze mulțimea valorilor parametrilor reali m, n, p pentru care următoarele integrale sunt convergente:

14. $\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{2x^4+1}}{x^{2n}}dx$. **R:** $n<\frac{1}{2}$.

15. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt[m]{x^5+x-2}}dx,\ m\in N,\ m\geq 2$. **R:** $m\in N,\ m\geq 2$.

9.1.3. INTEGRALE EULERIENE

BREVIAR TEORETIC

- ***Integrala gamma:*** $\Gamma(a)=\int\limits_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx;\ a>0$.

Proprietăți:

1) $\Gamma(1)=1$.
2) $\Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1),\ (\forall)a>1$.
3) $\Gamma(n)=(n-1)!,\ (\forall)n\in N$.
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

- ***Integrala beta:*** $\beta(a,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx;\ a>0, b>0$

Proprietăți:

1) $\beta(a,b)=\beta(b,a),\ \forall\, a,b>0$
2) $\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \forall\, a,b>0$.
2) $\beta(a,b)=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx$.
3) Dacă $a+b=1$, atunci $\beta(a,b)=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}$.

PROBLEME REZOLVATE

Să se calculeze următoarele integrale:

1. $I = \int\limits_{-1}^{+\infty} \sqrt{x+1}\, e^{-x-1} dx$.

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă $x+1=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt$. Intervalul de integrare se modifică după cum rezultă din tabelul de mai jos:

x	-1	∞
t	0	∞

Obținem: $I = \int\limits_{0}^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt$. Prin identificare cu formula de definiție a integralei gamma, rezultă $a-1=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{2}$, prin urmare

$I = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

2. $I = \int\limits_{0}^{+\infty} x^5 e^{-2x} dx$.

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă $2x=t \Rightarrow x=\frac{1}{2}t \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$.

x	0	∞
t	0	∞

Obținem: $I = \int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^5 e^{-t}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2^6}\int\limits_{0}^{\infty} t^5 e^{-t} dt = \frac{1}{2^6}\Gamma(6) = \frac{5!}{2^6} = \frac{15}{8}$.

3. $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^6 e^{-x^2} dx$.

Rezolvare:

Deoarece funcția care trebuie integrată este pară, rezultă că

$$I = 2\int_0^{+\infty} x^6 e^{-x^2}\, dx .$$

Folosim schimbarea de variabilă: $x^2 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$.

x	0	∞
t	0	∞

$$I = 2\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\, \tfrac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} .$$

4. $I = \int_0^1 \sqrt{x} \ln^3 x dx$ **.**

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă: $\ln x = t \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$

x	0	1
t	$-\infty$	0

$$I = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{t}{2}} t^3 e^t dt = \int_{-\infty}^{0} t^3 e^{\frac{3t}{2}} dt$$

Facem transformarea: $\frac{3t}{2} = -y \Rightarrow t = -\frac{2}{3} y \Rightarrow dt = -\frac{2}{3} dy$

t	$-\infty$	0
y	∞	0

$$I = \int_{\infty}^{0} \left(-\tfrac{2}{3} y\right)^3 e^{-y}\left(-\tfrac{2}{3}\right)dy = -\frac{16}{81}\int_0^{\infty} y^3 e^{-y} dy = -\frac{16}{81}\Gamma(4) = -\frac{32}{27} .$$

5. $I=\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ (*integrala Euler-Poisson*).

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă: $x^2=t \Rightarrow x=t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$.

x	0	∞
t	0	∞

$$I=\int_0^{\infty} e^{-t}\,\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6. $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^a}dx,\ a>1$.

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă: $\ln x=t \Rightarrow x=e^t \Rightarrow dx=e^t dt$.

x	1	∞
t	0	∞

$$I=\int_0^{\infty} t\,e^{-at}e^t\,dt=\int_0^{\infty} t\,e^{-(a-1)t}dt.$$

Folosim schimbarea de variabilă: $(a-1)t=y \Rightarrow t=\frac{1}{a-1}y \Rightarrow dt=\frac{1}{a-1}dy$.

t	0	∞
y	0	∞

$$I=\frac{1}{(a-1)^2}\int_0^{\infty} y\,e^{-y}dy=\frac{1}{(a-1)^2}\Gamma(2)=\frac{1}{(a-1)^2}.$$

7. Integrala $I = \int_{-1}^{\infty} e^{-0,5x^2 - x + 1} dx$ are forma $ke^a \left(\frac{\pi}{2}\right)^b$. Să se determine valorile parametrilor reali k, a şi b.

Rezolvare:

Avem că: $I = \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 - x + 1} dx = \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{x^2+2x-1}{2}} dx =$

$= \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{x^2+2x+1}{2}+\frac{3}{2}} dx = e^{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{\infty} e^{-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$. Folosim schimbarea de variabilă:

$\frac{x+1}{\sqrt{2}} = t \Rightarrow x = \sqrt{2}t - 1 \Rightarrow dx = \sqrt{2}dt$.

x	-1	∞
t	0	∞

$I = e^{\frac{3}{2}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} \sqrt{2}dt$. Folosind faptul că $\int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integrala Euler-Poisson), obținem că $I = e^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, prin urmare valorile căutate ale celor trei parametri sunt: $k = 1$, $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.

Să se calculeze următoarele integrale:

8. $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

Rezolvare:

$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=\int_0^1 x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}dx$. Prin identificare cu formula de definiție a integralei beta, obținem:

$a-1=-\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{1}{3};\ b-1=-\frac{1}{3}\Rightarrow b=\frac{2}{3}$, prin urmare, având în vedere definiția şi proprietatea 3 pentru integrala beta, rezultă:

$I=\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

9. $I=\int_0^1 x^8\left(1-x^3\right)dx$.

Rezolvare:

Facem schimbarea de variabilă $x^3=t\Rightarrow x=t^{\frac{1}{3}}\Rightarrow dx=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$.

x	0	1
t	0	1

$I=\frac{1}{3}\int_0^1 t^{\frac{8}{3}}(1-t)t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{3}\int_0^1 t^2(1-t)dt=\frac{1}{3}\beta(3,2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)}=\frac{1}{12}$.

10. $I=\int_0^1 \sqrt[3]{x}\left(1-x^2\right)^{1,5}dx$.

Rezolvare:

Facem schimbarea de variabilă: $x^2=t\Rightarrow x=t^{\frac{1}{2}}\Rightarrow dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$.

x	0	∞
t	0	∞

Prin urmare, $I=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\left(1-x^2\right)^{1,5}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{6}}(1-t)^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{2}{3},\frac{5}{2}\right).$$

11. Să se calculeze: a) $I=\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^6}dx$; b) $I=\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}dx$.

Rezolvare:

a) Prin identificare cu a doua formulă de definiție a integralei beta (proprietatea 2), obținem: $a-1=1\Rightarrow a=2$; $a+b=6\Rightarrow b=4$, prin urmare $I=\beta(2,4)=\frac{\Gamma(2)\cdot\Gamma(4)}{\Gamma(6)}=\frac{1}{20}$.

b) Facem schimbarea de variabilă $x^6=t\Rightarrow x=t^{\frac{1}{6}}\Rightarrow dx=\frac{1}{6}t^{-\frac{5}{6}}dt$.

x	0	∞
t	0	∞

$$I=\frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{6}}}{1+t}\cdot\frac{1}{6}t^{-\frac{5}{6}}dt=\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1+t}=\frac{1}{6}\beta\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

12. Integrala $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{1,4}(\cos x)^{-0,6}dx$ are forma $k\cdot\beta(p,q)$, unde $k,p,q\in R$; $p,q>0$. Să se afle valorile paramertilor k,p,q.

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă: $\sin^2 x=t\Rightarrow 2\sin x\cos x dx=dt$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Transformăm funcția care trebuie integrată astfel:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{0,4}(\cos x)^{-1,6}\,2\sin x\cos x dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x)^{0,2}(\cos^2 x)^{-0,8}\,2\sin x\cos x dx$$. Obținem:

$I=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{0,2}(1-t)^{-0,8}dt=\frac{1}{2}\beta(1{,}2;\ 0{,}2)$, deci $k=\frac{1}{2};\ p=1{,}2;\ q=0{,}2$.

13. Să se calculeze integrala: $I=\int_{-4}^{3}\frac{dx}{\sqrt[6]{(x+4)(3-x)^5}}$.

Rezolvare:

Integrala se poate scrie: $I=\int_{-4}^{3}(x+4)^{-\frac{1}{6}}(3-x)^{-\frac{5}{6}}dx$.

Încercăm să facem schimbarea de variabilă

$x+4=t\Rightarrow x=t-4\Rightarrow dx=dt$.

x	-4	3
t	0	7

Se observă că intervalul de integrare devine $(0,7)$, prin urmare, pentru a ajunge la intervalul $(0,1)$, vom folosi schimbarea de variabilă $\frac{x+4}{7}=t\Rightarrow x=7t-4\Rightarrow dx=7dt$.

x	-4	3
t	0	1

Obținem: $I=\int_0^1(7t)^{-\frac{1}{6}}(7-7t)^{-\frac{5}{6}}7dt=7^{-\frac{1}{6}}\cdot 7^{-\frac{5}{6}}\cdot 7\int_0^1 t^{-\frac{1}{6}}(1-t)^{-\frac{5}{6}}dt=$

$$=\beta\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)=\beta\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\pi.$$

PROBLEME PROPUSE

Să se calculeze valoarea următoarelor integrale:

1. $\int_0^{\infty} x^6 e^{-3x} dx$ **R:** $\frac{80}{243}$

2. $\int_0^{\infty} x^7 e^{-x^2} dx$ **R:** 3;

3. $\int_0^1 \left(x - x^2\right)^5 dx$ **R:** $\frac{1}{2772}$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$ **R:** $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

5. $\int_0^1 \sqrt{x - x^2} dx$ **R:** $\frac{\pi}{8}$

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ **R:** $\sqrt{\pi}$

7. $\int_{-\infty}^{-1} \sqrt{(-x-1)^5}\, e^{x+1} dx$ **R:** π

8. $\int_{-1}^{0} x^2 (1+x)^3 dx$ **R:** $\frac{1}{60}$

9. $\int_{-\infty}^{0} x^5 e^x dx$ **R:** -120

10. $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2 - 3x + 2}{e^x} dx$ **R:** -1

11. $\int_0^1 x^{14} \left(1 - x^3\right)^6 dx$ **R:** $\frac{1}{6930}$

12. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} dx$ **R:** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

13. $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ **R:** π

14. $\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(1+x)^6} dx$ **R:** $\frac{1}{5}$

15. $\int_0^1 \left(x - x^2\right)^4 dx$ **R:** $\frac{1}{630}$

16. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[6]{x^5(1-x)}} dx$ **R:** 2π

17. $\int_0^1 x(\ln x)^5 dx$ **R:** $-\frac{15}{8}$

18. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx,\ a > 0$ **R:** $\frac{\pi a^4}{16}$

19. $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ **R:** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

20. $\int_{-\infty}^{-2} (x+2)^5 e^{x+2} dx$ **R:** -120

21. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}dx$ **R:** $\pi\sqrt{2}$ **22.** $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ **R:** $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

23. $\int_0^\infty e^{-x^n}dx;\ n>0$ **R:** $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$

24. $\int_0^\infty x^m e^{-x^n}dx;\ m,n>0$ **R:** $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$

25. $\int_2^\infty (x-2)^7 e^{2-x}dx$ **R:** $7!$ **26.** $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$ **R:** 2

27. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^5 x\,dx$ **R:** $\frac{1}{12}$ **28.** $\int_0^{+\infty} \sqrt[7]{x^5}e^{-\sqrt[7]{x}}dx$ **R:** $7\cdot 11!$

29. $\int_{-3}^0 x^4\sqrt{9-x^2}dx$ **R:** $\frac{729}{32}\pi$

30. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ **R:** $\sqrt{2\pi}$ **31.** $\int_0^\infty \frac{x^{10}}{\left(1+2x^2\right)^3}dx$ **R:** $\sqrt{2\pi}$

32. $\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}dx$ **R:** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ **33.** $\int_{-3}^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{(x+3)^5(1-x)}}$ **R:** 2π

34. $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2}dx; n\in N$ **R:** 0, dacă n impar; $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\pi}$, dacă n par

35. $\int_{-\infty}^{-1} (x+1)^3 e^{x+1}dx$ **R:** -3! **36.** $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}dx$ **R:** π

37. $\int_1^e \frac{1}{x}\ln^3 x(1-\ln x)^4 dx$ **R:** $\frac{1}{280}$ **38.** $\int_0^\infty \frac{x^4}{1+x^6}dx$ **R:** $\frac{\pi}{3}$

39. $\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ **R:** $\dfrac{\pi a^6}{32}$

40. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2+2x-4}dx$ **R:** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2e^3}$ **41.** $\int_0^{\infty} x^4\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)^{-\frac{7}{2}}dx$ **R:** $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$

42. $\int_0^3 x^5\sqrt{9-x^2}\,dx$ **R:** $\frac{5832}{35}$ **43.** $\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-x^n}dx; n\in N$ **R:** $\dfrac{n+1}{n^3}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$

44. $\int_0^{\infty} x^3e^{1-x}dx$ **R:** $6e$

45. $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx;\ p>0$ **R:** $\Gamma(p)$ **46.** $\int_0^{\infty}\dfrac{x^4}{\left(1+2x^3\right)^2}dx$ **R:** $\dfrac{\pi\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}}{27}$

47. $\int_{-1}^{\infty} e^{-x^2-2x+3}dx$ **R:** $\dfrac{e^4\sqrt{\pi}}{2}$ **48.** $\int_1^{\infty}(x-1)^5e^{-(x-1)^n}dx$ **R:** 1

49. $\int_0^{\infty} x^ne^{-x^2}dx; n\in N$ **R:** **50.** $\int_0^{\infty}\dfrac{x^3}{1+x^8}dx$ **R:** $\dfrac{\pi}{8}$

51. $\int_{-4}^0 x^6\sqrt{16-x^2}\,dx$ **R:** 1280π

52. $\int_0^1 x^5\left(1-x^3\right)^4dx$ **R:** $\frac{1}{90}$ **53.** $\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\cos^2 x\,dx$ **R:** $\sqrt{\pi}$

54. $\int_0^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$ **R:** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ **55.** $\int_0^1 x^8\left(1-x^3\right)^4dx$

56. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^6}dx$ **R:** $\frac{\pi}{3}$ **57.** $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}\left(1+x^2\right)}dx$ **R:** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

58. $\int_0^\infty \frac{x^2}{\left(1+x^4\right)^2}dx$ **R:** $\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$

59. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}x\,dx;\ m,n\in N$ **R:** $\frac{(m-1)!(n-1)!}{2(m+n-1)!}$

60. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2+x+1}dx$ **R:** $\frac{e^{\frac{9}{8}}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ **61.** $\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$; $n\in N^*$

62. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2+4x+1}dx$ **R:** $\frac{e^3\sqrt{2\pi}}{2}$ **63.** $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx$ **R:** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

64. $\int_2^\infty \sqrt{x-2}\,e^{2-x}dx$ **R:** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ **65.** $\int_1^\infty x^3e^{1-x}dx$ **R:** 16

66. $\int_0^1 x^3\left(1-x^2\right)^5dx$ **R:** $\frac{1}{84}$

67. $\int_0^\infty \frac{x^4}{\left(1+2x^2\right)^3}dx$ **R:** $\frac{3\pi\sqrt{2}}{128}$

68. Integrala $I=\int_{-1}^{\infty} e^{-3x^2-6x+5}dx$ are forma $ke^a\pi^b$, unde $k,a,b\in R$. Să se afle valorile parametrilor k,a,b.

R: $k=\frac{\sqrt{3}}{6}$, $a=8$, $b=\frac{1}{2}$.

69. Integrala $I=\int_0^{\pi/2}\sin^2x\cos^4x\,dx$ are forma $k\pi^a$ unde

$k, a \in R$. Să se determine valorile parametrilor k şi a.

R: $k = \frac{1}{32}$; $a = 1$.

70. Integrala $I = \int_0^\infty x^{2,5} e^{-4x^3} dx = a\Gamma(b)$, unde $a, b \in R$; $b > 0$. Să se determine valorile parametrilor a şi b.

71. Integrala $J = \int_0^1 x^{3,6}\left(1 - x^3\right)^{4,8} dx = k\beta(p, q)$, unde $k, p, q \in R$; $p, q > 0$. Să se determine valorile parametrilor k, p, q.

72. Să se calculeze $T = \int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} dx, m > 0, n > 0 \cdot$

9.2. INTEGRALE DUBLE

BREVIAR TEORETIC

Fie $D \subset R^2$ un domeniu mărginit şi $f : D \to R$ o funcție integrabilă pe D. Calculăm $I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Reguli de calcul

1. Dacă D este dreptunghiul $[a,b] \times [c,d]$, atunci:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

2. Presupunem că D este un domeniu închis, simplu in raport cu axa Oy, adică $D = \left\{ (x, y) \in R^2 \ / \ a \le x \le b, \ \alpha(x) \le y \le \beta(x) \right\}$, iar funcția $y \to f(x, y)$ este integrabilă pe $[\alpha(x), \beta(x)]$. Atunci:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy \right] dx .$$

3. Presupunem că D este un domeniu închis, simplu in raport cu axa Ox, adică $D = \left\{ (x, y) \in R^2 \ / \ a \le y \le b, \ \alpha(y) \le x \le \beta(y) \right\}$, iar funcția $x \to f(x, y)$ este integrabilă pe $[\alpha(y), \beta(y)]$. Atunci:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx \right] dy .$$

4. *Schimbarea de variabilă în integrala dublă: trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare.*

Considerăm transformarea: $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$, unde $\rho \ge 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$. Rezultă că dacă (x, y) parcurge domeniul D, atunci (ρ, θ) parcurge domeniul $D^* = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$, unde $[r_1, r_2] \subset [0, \infty)$ şi $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, 2\pi]$. În aceste condiții, rezultă că:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\ d\rho\, d\theta\ .$$

Observație. Dacă D este un domeniu închis şi mărginit, atunci aria suprafeței D este: $Aria(D) = \iint_D dxdy$.

Formule ce vor fi utilizate:

- ecuația dreptei ce trece prin punctele $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$

este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot$

- ecuația cercului cu centrul $A(a, b)$ şi raza r este:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră $D = [0,1] \times [-1,0]$ şi $f : R \to R$, $f(x,y) = 2x^2 y - xy^3 + 1$. Să se calculeze $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Rezolvare:

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 (2x^2 y - xy^3 + 1)dy \right) dx = \int_0^1 \left[\left(x^2 y^2 - \tfrac{1}{4} xy^4 + y \right) \Bigg|_{y=-1}^{y=0} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-x^2 + \tfrac{1}{4} x + 1 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8} + x \right) \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + 1 = \frac{19}{24}.$$

2. Să se calculeze $I = \iint\limits_D (x^2 - y)dxdy$, unde

$D = \{(x,y) \in R^2 / 0 \le x \le 1; x - 2 \le y \le x^2 + 3x - 1\}$.

Rezolvare:

Deoarece domeniul D este simplu în raport cu axa Oy, obţinem:

$I = \int_0^1 \left(\int_{x-2}^{x^2+3x-1} (x^2 - y)dy \right) dx$. Avem că:

$\int_{x-2}^{x^2+3x-1} (x^2 - y)dy = \frac{1}{2} x^4 - x^3 - 2x^2 + x + \frac{3}{2}$, prin urmare

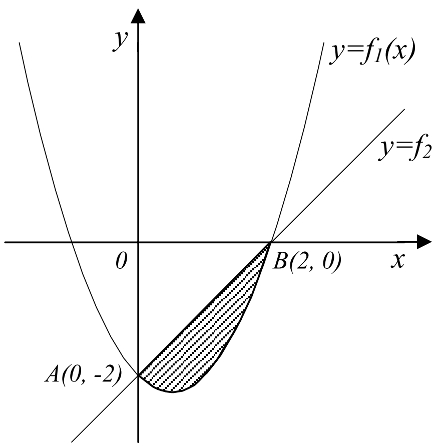
$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^4 - x^3 - 2x^2 + x + \frac{3}{2} \right) dx = \frac{71}{60}$.

3. Să se calculeze $I = \iint\limits_D dxdy$, unde

$D = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, y \le x - 2,\ y \ge x^2 - x - 2\right\}$.

Rezolvare:

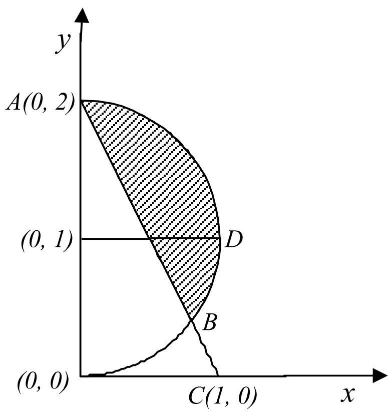
Considerăm funcțiile $f_1, f_2 : R \to R$, $f_1(x) = x^2 - x - 2$, $f_2(x) = x - 2$. Determinăm punctele de intersecție ale graficelor celor două funcții, rezolvând sistemul $\begin{cases} y = x^2 - x - 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$ şi găsim punctele $A(0, -2)$ şi $B(2, 0)$. Domeniul D este dat de suprafața haşurată.



Observăm că D se mai poate exprima astfel:
$D = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, 0 \le x \le 2, x^2 - x - 2 \le y \le x - 2\right\}$, deci D este simplu în raport cu axa Oy. Prin urmare, integrala devine:

$$I = \int_0^2 \left(\int_{x^2 - x - 2}^{x - 2} dy \right) dx = \int_0^2 \left(y \Big|_{y = x^2 - x - 2}^{y = x - 2} \right) dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \frac{4}{3}.$$

4. Să se calculeze $I = \iint\limits_D x dx dy$, unde D este domeniul din figură.



Rezolvare:

- Ecuația dreptei AC este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y = 2$.
- Ecuația cercului de centru $(0,1)$ si rază 1 este:

$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0$.

- Coordonatele punctului B se determină rezolvând sistemul:

$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \ y = 2 \\ x = \frac{4}{5}, \ y = \frac{2}{5} \end{cases}$; obținem $A(0,2)$ şi $B\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

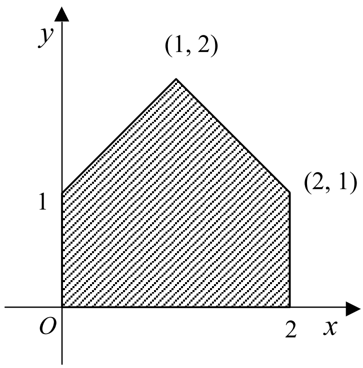
Considerăm domeniul simplu în raport cu axa Ox . Cu notațiile din breviarul teoretic, punctul 2, avem:

$a = \frac{2}{5}, \ b = 2$; $2x + y = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(2 - y) \Rightarrow \alpha(y) = \frac{1}{2}(2 - y)$;

$x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2y - y^2} \Leftrightarrow \beta(y) = +\sqrt{2y - y^2}$. Rezultă:

$$I=\int_{\frac{2}{5}}^{2}\left(\int_{\frac{2-y}{2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x dx\right)dy=\int_{\frac{2}{5}}^{2}\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{2-y}{2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\right)dy=-\frac{1}{8}\int_{\frac{2}{5}}^{2}\left(5y^2-12y+4\right)dy=\frac{32}{75}\cdot$$

5. Să se calculeze $I=\iint\limits_D dxdy$, unde domeniul D este dat de suprafața hașurată.

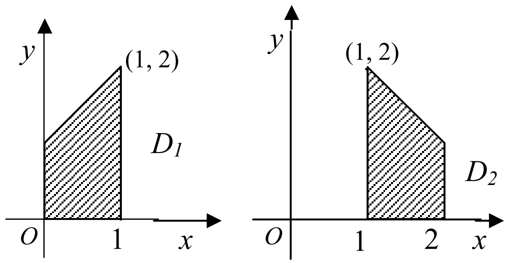


Rezolvare:

Ecuația dreptei d_1 este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y=x+1\cdot$

Ecuația dreptei d_2 este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y=3-x\cdot$

Dorim să integrăm pe domenii simple în raport cu Oy. Vom descompune D în reuniune a două domenii D_1, D_2 care au interioarele disjuncte:



Pentru D_1 avem $a = 0$; $b = 1$; $\alpha(x) = 0,\ \beta(x) = x + 1$

$$I_1 = \iint_D dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{x+1} dy \right] dx = \int_0^1 (x+1)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Pentru D_2 avem $a = 1,\ b = 2$; $\alpha(x) = 0,\ \beta(x) = 3 - x$.

$$I_2 = \iint_D dxdy = \int_1^2 \left[\int_0^{3-x} dy \right] dx = \int_1^2 (3-x)dx = 3 - \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 = 3 - \frac{3}{2}.$$

Rezultă că $I = I_1 + I_2 = 3$.

6. Să se calculeze $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, unde

$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \big/ 4 \le x^2 + y^2 \le 9; y \ge 0 \right\}$.

Rezolvare:

Folosim trecerea la coordonatele polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases},\ \rho \in [0, \infty),\ \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \le \rho \le 3 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Vom avea: $D^* = \left\{(\rho,\theta) \in R^2 / 2 \le \rho \le 3, 0 \le \theta \le \pi\right\}$ şi $dxdy = \rho \cdot d\rho d\theta$.

$$I = \iint_{D^*} \rho^2 d\rho d\theta = \int_0^{\pi}\left(\int_2^3 \rho^2 d\rho\right)d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} 19 d\theta = \frac{19}{3}\pi .$$

7. Să se calculeze aria discului de rază r, unde $r > 0$.

Rezolvare:

Avem de calculat aria domeniului $D = \left\{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \le r^2\right\}$. Conform observației din breviarul teoretic, aria domeniului D este egală cu $\iint_D dxdy$.

Folosim trecerea la coordonatele polare :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [0,\infty), \ \theta \in [0,2\pi]$$

$(x, y) \in D \Rightarrow x^2 + y^2 \le r^2 \Rightarrow \rho \in [0, r], \ \theta \in [0, 2\pi]$. Prin urmare, $D^* = \left\{(\rho,\theta) \in R^2 / 0 \le \rho \le r, \ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$ şi $dxdy = \rho \cdot d\rho d\theta$. Prin urmare,

$$\iint_D dxdy = \iint_{D^*} \rho\, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r \rho\, d\rho\right)d\theta = \frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi r^2 .$$

8. Să se calculeze $I = \iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ unde $D = \left\{(x, y) \in R^2 / 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ 0 \le x \le y\right\}$.

Rezolvare:

Folosim trecerea la coordonatele polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \ \rho \in [0,\infty); \theta \in [0,2\pi].$$

$$(x,y) \in D \Rightarrow 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le x \le y \Rightarrow \rho \in [1,\ 2],\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right].$$

Avem: $D^* = \left\{(\rho,\theta) \in R^2 \middle/ 1 \le \rho \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ şi

$dxdy = \rho \cdot d\rho d\theta$. Rezultă:

$$I = \iint_{D^*} e^{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}}\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^2 \rho e^{\rho} d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\rho e^{\rho}\Big|_1^2 - \int_1^2 e^{\rho} d\rho\right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2e^2 - e - e^2 + e\right) d\theta = e^2\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\cdot e^2 .$$

PROBLEME PROPUSE

1. Să se calculeze $\iint_D \left(5x^3y - 2xy + 7\right)dxdy$ unde $D = [-2,0]\times[1,2]$. **R:** -10.

2. Să se calculeze $\iint_D \left(x + \frac{y}{x}\right)dxdy$ unde $D = \left\{(x,y) \in R^2 / 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x - 1\right\}$. **R:** $\frac{14}{3} + \frac{1}{2}\ln 3$.

3. Să se calculeze $\iint_D \frac{1}{x + y + 1}dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in R^2 / y - x \le 1,\ x + y \le 3;\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$. **R:** $2 - \ln 2$.

4. Să se calculeze $\iint\limits_D (2xy + x - 3) y dxdy$

unde $D = \{(x, y) \in R^2 / 1 \le x \le 2;\ x^2 + 1 \le y \le x^2 - x + 3\}$. **R:** $\frac{4}{15}$.

5. Să se calculeze $\iint\limits_D \frac{y-4}{\sqrt{x}} dxdy$ unde

$D = \{(x, y) \in R^2 / 1 \le x \le 4,\ 2x - 1 \le y \le x^2 + 1\}$. **R:** $\frac{229}{9}$.

6. Să se calculeze $\iint\limits_D \frac{y}{x} dxdy$, unde

$D = \{(x, y) \in R^2 / 1 \le x \le 2,\ 2x - 1 \le y \le x^2\}$. **R:** $\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\ln 2$.

7. Să se calculeze $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ unde unde

$D = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \le 16, x \ge 0, y \ge 0\}$. **R:** $\frac{(1 - e^{-16})\pi}{4}$.